Graduate Texts in Mathematics



目　　录

§0. 預备知識

要理解本書前面七章，只須具备初等代数和数学分析的基础知識就够了。特别是，我們假定讀者熟知下面(1)至(7)中所列出的概念和結果。

(1) 数学归納法；代数运算的交换律和結合律；綫性組合；等价关系以及将集分解成等价类。

(2) 可列集；可列个可列集的併集是可列集。

(3) 实数；数直綫的初等度量性質和拓扑性質(例如：有理数集是处处稠密的，每一个开集可以表为可列个不相交开区間的併集)；海尼-波雷耳定理。

(4) 函数的一般概念；特别是数列(就是以正整数集为定义域的函数)的概念；函数的和，积；函数与常数的乘积；函数的絕对值。

(5) 实数集与实值函数的上确界和下确界；实数列和实值函数列的極限，上極限，下極限。

(6) 符号 $+\infty$ 和 $-\infty$；它們和实数 x 間的代数关系：

$$(\pm\infty)+(\pm\infty)=x+(\pm\infty)=(\pm\infty)+x=\pm\infty;$$

$$x(\pm\infty)=(\pm\infty)x=\begin{cases}\pm\infty, & 若\ x>0,\\ 0, & 若\ x=0,\\ \mp\infty, & 若\ x<0;\end{cases}$$

$$(\pm\infty)(\pm\infty)=+\infty,$$

$$(\pm\infty)(\mp\infty)=-\infty;$$

$$\frac{x}{\pm\infty}=0;$$

$$-\infty<x<+\infty.$$

广义实数这个术語指的是实数或符号$+\infty$与$-\infty$二者之一。在数直綫上补入$+\infty$和$-\infty$两个符号，称为**扩張的数直綫**。

(7) 如果x和y是实数，則

$$x\cup y=\max\{x,y\}=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|),$$

$$x\cap y=\min\{x,y\}=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

类似地，如果f和g是实値函数，則$f\cup g$和$f\cap g$分别是由等式

$$(f\cup g)(x)=f(x)\cup g(x)$$

和

$$(f\cap g)(x)=f(x)\cap g(x)$$

确定的函数。实数列$\{x_n\}$的上确界和下确界分別記为

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}x_n \quad \text{和} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty}x_n.$$

按照这种記法，有

$$\limsup_n x_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}x_m$$

和

$$\liminf_n x_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}x_m.$$

在第八章中要用到度量空間的概念，度量空間的完备性，可分性，以及定义在度量空間上的函数的一致連續性概念。此外，在第八章中还要用到分析中稍微复杂一些的概念，例如单側連續性概念。

第九章最后一节需要用到齐霍諾夫关于乘积空間的緊性的定理（对于可列个因子，其中每一个因子是一个区間）。

一般說来，在每章中都将自由地运用以前各章的結論；唯一的例外是最后三章中并不需要用到第九章的內容。

在第十、十一和十二章里，我們将系統地运用点集拓扑和拓扑群論中的概念和結論。我們在下面列举出全部有关的定义和定理。这一篇附录不能作为拓扑学的教科書，乃是为了达到下面四个目的：(1)为专家指出，对于有关的概念和結論，我們需要那一种

表达的方式；(2)为初学者指出，在进入最后三章的閱讀以前，应該熟悉那些概念和結論；(3)說明某些未經普遍采用的术語的意义；(4)使讀者能够很快地查到他所需要的东西。

拓 扑 空 間

拓扑空间是指一个集 X 和它的某些子集所組成的一个类，这个类包含 0 和 X，并且封閉于有限交与任意併（不一定是有限或可列）两种运算；上述集类中的集称为 X 中的**开集**。設 E 是 X 的子集，如果存在开集的叙列 $\{U_n\}$ 使得 $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$，則称 E 是一个 G_δ-集。由全体 G_δ-集組成的类对于有限併与可列交两种运算是封閉的。拓扑空間称为**离散的**，如果 X 的每一个子集都是开集，換一句話說，如果 X 的每一个单点子集是开集。集 E 称为**閉集**，如果 $X-E$ 是开集。由全体閉集組成的类包含 0 和 X，并且封閉于有限併与任意交的运算。X 的子集 E 的**内部** E^0 是指被 E 所包的最大开集；E 的**閉包** $\bar{E}$ 是指包含 E 的最小閉集。集的内部是开集，閉包是閉集。如果 E 是开集，則 $E^0=E$；如果 E 是閉集，則 $\bar{E}=E$. 集 E 的閉包是由一切具有下列性質的点 x 組成的：对于包含 x 的每一个开集 U，$E\cap U\neq 0$。如果 $\bar{E}=X$，則称集 E 在 X 中**稠密**。設 Y 是拓扑空間 X 的子集，如果 Y 中被称为开集的子集可由 X 中的一个开集与 Y 相交而得，則 Y 本身形成一个拓扑空間（X 的**子空間**）；Y 中的拓扑結构称为**相对拓扑**。包含 X 中的点 x [或 X 的子集 E] 的开集称为 x [或 E] 的**邻域**。設 **B** 是由开集組成的一个类，如果对于 X 中每一个 x，并对于 x 的每一个邻域 U，存在 **B** 中的集 B，使得 $x\in B\subset U$，則称 **B** 是一个**基**。**数直綫的拓扑**由下列条件确定：由全体开区間組成的类构成一个基。設有一个开集类，如果由它的元素的一切有限交所組成的类构成一个基，則称开集类为**子基**。如果空間 X 具有可列的基，則称 X 是**可分的**。可分空間的子空間是可分的。

設 E 是拓扑空間 X 的子集，如果开集类 $\mathbf{K}$ 能使 $E\subset\bigcup\mathbf{K}$，則称 $\mathbf{K}$ 是 E 的**开复盖**。如果 $\mathbf{K}$ 是 X 的子集 E 的开复盖，而 X 是可分的，則存在 $\mathbf{K}$ 的可列子类 $\{K_1, K_2, \cdots\}$ 使得这个子类也是 E 的开复盖。如果对于 X 的子集 E 的每一个开复盖 $\mathbf{K}$，存在 $\mathbf{K}$ 的有限子类 $\{K_1, \cdots, K_n\}$ 使得这个子类成为 E 的开复盖，則称 E 是**紧的**。設 $\mathbf{K}$ 是一个集类，如果 $\mathbf{K}$ 的任何有限子类具有非空的交集，則称 $\mathbf{K}$ 具有**有限交的性質**。空間 X 为紧的必要和充分条件是：每一个具有有限交性質的閉集类有一个非空的交集。設 E 是 X 中的集，若存在紧集敘列 $\{C_n\}$ 使得 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$，則称 E 是 **σ-紧的**。如果空間 X 中的每一个点具有閉包为紧集的邻域，則称 X 是**局部紧的**。設 E 是局部紧空間的子集，若存在紧集 C 使得 $E\subset C$，則称 E 是**有界的**。局部紧空間中全体有界开集組成的类是一个基。有界集的閉子集是紧集。設 E 是局部紧空間的子集，若存在紧集的敘列 $\{C_n\}$ 使得 $E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$，則称 E 是 **σ-有界的**。对于每一个局部紧但并非紧的拓扑空間 X，存在紧空間 X^*，X^* 包含 X，并包含 X 以外的恰好一个点 x^*；我們說：X 由于点 x^* 而**紧化成为** X^*。X 中的开子集以及 X 中紧閉子集的余集（对于 X^*）构成 X^* 中的开集。

設 $\{X_i: i\in I\}$ 是一个拓扑空間类，这个类的**笛卡兒乘积空間** $X=\times\{X_i: i\in I\}$ 指的是定义在 I 上并具有下列性質的一切函数 x 所組成的集：对于 I 中每一个 i，$x(i)\in X_i$。对于 I 中任意固定的 i_0，以 E_{i_0} 表示 X_{i_0} 中任意一个开子集，而当 $i\neq i_0$ 时，則令 $E_i=X_i$；X 中的开集是由下列条件确定的：由一切形如 $\times\{E_i: i\in I\}$ 的集組成的类构成一个子基。定义在 X 上由等式 $\xi_i(x)=x(i)$ 确定的函数 ξ_i 是連續的。任何紧空間类的笛卡兒乘积空間是紧空間。

如果拓扑空間中任意两个不相同的点具有不相交的邻域，則称这个拓扑空間为**豪司道夫空間**。豪司道夫空間的任意两个不相交的紧子集具有不相交的邻域。豪司道夫空間的紧子集是閉集。

如果局部紧空間是豪司道夫空間或可分空間，則它的紧化空間也分别是豪司道夫空間或可分空間。定义在紧集上的实值連續函数是有界的。

設 X 是拓扑空間，我們用记号 $\mathscr{F}$（或 $\mathscr{F}(X)$）表示定义在 X 上并滿足下列条件的一切实值連續函数 f 所組成的类：对于 X 中任意的 x，$0\leqslant f(x)\leqslant 1$。設 X 是豪司道夫空間，如果对于 X 中每一个点 y 并对于每一个不包含 y 的閉集 F，存在 $\mathscr{F}$ 中的函数 f，使得 $f(y)=0$ 并使得当 $x\in F$ 时 $f(x)=1$，則称 X 是**完全正則的**。局部紧豪司道夫空間是完全正則的。

設 X 是一个集，在 $X\times X$ 上定义一个实值函数 d（称为**距离**），滿足下列性質：

$$d(x,y)\geqslant 0,$$
$$d(x,y)=0,\quad \text{当而且只当 } x=y \text{ 时},$$
$$d(x,y)=d(y,x),$$
$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y),$$

則称 X 是一个**度量空間**。設 E 和 F 是度量空間 X 的非空子集，則称 $d(E,F)=\inf\{d(x,y):x\in E,\ y\in F\}$ 为 E 和 F 之間的距离。如果 $F=\{x_0\}$ 是一个单点集，則将 $d(E,\{x_0\})$ 简記为 $d(E,x_0)$。在度量空間 X 中子集 $E=\{x:d(x_0,x)<r_0\}$ 称为以 x_0 为**中心**，以 r_0 为**半徑的球体**，其中 x_0 是一个点，r_0 是一个正数。**度量空間的拓扑**由下列条件确定：由一切球体組成的类构成一个基。度量空間是完全正則的。度量空間中的閉集是 G_δ-集。要使得度量空間是可分的，必須而且只須，它包含一个稠密可列集。設 E 是度量空間的一个子集，并令 $f(x)=d(E,x)$，則 f 是一个連續函数，并且 $\overline{E}=\{x:f(x)=0\}$。如果 X 是数直綫，或有限条数直綫的笛卡兒乘积空間，則 X 是局部紧的可分豪司道夫空間；如果定义 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 間的距离为 $d(x,y)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$，則 X

是一个度量空間。数直綫上的閉区間是紧集。

从拓扑空間 X 映入拓扑空間 Y 的变换 T 称为**連續**的，如果每一个开集的逆映像仍为开集，换一句話説，如果每一个閉集的逆映像仍为閉集。如果变换 T 将 X 中的任意开集映为 Y 中的开集，則称 T 是一个**开变换**。設 $\mathbf{B}$ 是 Y 中一个子基，則 T 为連續的必要和充分条件是：对于每一个 $B\in\mathbf{B}$，$T^{-1}(B)$ 是开集。設 T 是 X 在 Y 上的連續变换，并且 X 是紧的，則 Y 也是紧的。設 T 是 X 在 Y 上的一个一一連續变换，并且它的逆变换也是連續的，則称 T 是一个**同胚**。

实值連續函数項的一致收斂級数之和是連續的。如果 f 和 g 是实值連續函数，則 $f\cup g$ 和 $f\cap g$ 都是連續的。

拓 扑 群

在非空集 X 中定义一种滿足結合律的乘法如下：对于 X 中任意两个元素 a 和 b，方程 $ax=b$ 和 $ya=b$ 都可解，則称 X 是一个**群**。在每一个群 X 中，存在唯一的一个**单位元素** e，滿足下述关系：对于 X 中每一个 x，$ex=xe=x$。X 中每一个元素 x 有唯一的一个**逆元素** x^{-1}，滿足关系 $xx^{-1}=x^{-1}x=e$。設 Y 是 X 的非空子集，若对于 Y 中任意两个元素 x 和 y，有 $x^{-1}y\in Y$，則称 Y 是 X 的**子群**。若 E 是群 X 的任意子集，我們以 E^{-1} 表示由一切形如 x^{-1} 的元素組成的集，其中 $x\in E$；若 E 和 F 是群 X 的任意两个子集，以 EF 表示由一切形如 xy 的元素組成的集，其中 $x\in E$，$y\in F$。要使得群 X 的非空子集 Y 是一个子群，必須而且只須 $Y^{-1}Y\subset Y$。如果 $x\in X$，則将 $\{x\}E$ 和 $E\{x\}$ 分别簡記为 xE 和 Ex；xE 和 Ex 分別称为 E 的**左轉移**和**右轉移**。如果 Y 是群 X 的子群，則集 xY 和 Yx 分别称为 Y 的左和右**陪集**。設 Y 是群 X 的子群，如果对于 X 中每一个 x 有 $xY=Yx$，則称 Y 是 X 的**不变子群**（或**正規子群**）。設 Y 是 X 的不变子群，$\hat{X}$ 是由 Y 的一切陪集組成的类，在 $\hat{X}$

中定义一种乘法如下：对于 $\hat{X}$ 中任意两个元素 Y_1 和 Y_2，它們的乘积是集 Y_1Y_2，则 $\hat{X}$ 是一个群；这个群称为 X 对于 Y 的**因子群**，記为 X/Y。$\hat{X}$ 的单位元素 $\hat{e}$ 就是 Y。設 Y 是群 X 的不变子群，对于 X 中每一个 x，令 $\pi(x)$ 为包含 x 的 Y 的陪集，则称变换 π 是 X 在 $\hat{X}$ 上的**射影**。設 T 是群 X 在群 Y 內的一个变换，如果对于 X 中任意两个元素 x 和 y，有 $T(xy)=T(x)T(y)$，则称 T 是一个**同态**。群 X 在一个因子群 $\hat{X}$ 上的射影是一个同态。

設群 X 是一个豪司道夫空間，如果将 (x, y) 变为 $x^{-1}y$ 的变換（$X\times X$ 在 X 上）是連續的，则称 X 是一个**拓扑群**。設 $\mathbf{N}$ 是由拓扑群中包含单位元素 e 的开集組成的一个类，如果：

(1) 对于每一个异于 e 的 x，存在 $\mathbf{N}$ 中的集 U 使得 $x\notin U$，

(2) 对于 $\mathbf{N}$ 中任意两个集 U 和 V，存在 $\mathbf{N}$ 中的集 W 使得 $W\subset U\cap V$，

(3) 对于 $\mathbf{N}$ 中任意的集 U，存在 $\mathbf{N}$ 中的集 V 使得 $V^{-1}V\subset U$，

(4) 对于 $\mathbf{N}$ 中任意的集 U，幷对于 X 中任意的元素 x，存在 $\mathbf{N}$ 中的集 V 使得 $V\subset xUx^{-1}$，

(5) 对于 $\mathbf{N}$ 中任意的集 U，幷对于 U 中任意的元素 x，存在 $\mathbf{N}$ 中的集 V 使得 $Vx\subset U$，

则称 $\mathbf{N}$ 是一个**在点 e 处的基**。由 e 的一切邻域組成的类是一个在 e 处的基；反之，如果在任意一个群 X 中，$\mathbf{N}$ 是滿足上述五个条件的集类，若取由 $\mathbf{N}$ 中之集的一切轉移組成的类作为一个基，则对于如此定义的拓扑結构而言，X 成为一个拓扑群。設 V 是 e 的一个邻域，如果 $V=V^{-1}$，则称 V 是**对称的**；由 e 的一切对称邻域組成的类是一个在 e 处的基。如果 $\mathbf{N}$ 是一个在 e 处的基，F 是 X 中任意一个閉集，则$F=\bigcap\{UF: U\in\mathbf{N}\}$。

拓扑群 X 的子群[或不变子群]的閉包是 X 的子群[或不变子群]。設 Y 是拓扑群 X 的一个閉的不变子群，如果将群 $\hat{X}=X/Y$ 中具有下述性質的子集称为开集：它在变換 π 之下的逆映像是 X

中的开集，則 $\hat{X}$ 是一个拓扑群，并且 X 在 $\hat{X}$ 上的射影 π 是一个开的連續变換。

設 C 是一个紧集，U 是拓扑群 X 中的一个开集，并且 $C\subset U$，則存在 e 的邻域 V 使得 $VCV\subset U$。設 C 和 D 是两个不相交的紧集，則存在 e 的邻域 U 使得 UCU 和 UDU 不相交。設 C 和 D 是任意两个紧集，則 C^{-1} 和 CD 都是紧集。

設 E 是拓扑群 X 的子集，如果对于 e 的每一个邻域 U，存在有限集 $\{x_1,\cdots,x_n\}$（当 $E\neq 0$ 时可以假定这个集是 E 的一个子集）使得 $E\subset\bigcup_{i=1}^{n}x_i U$，則称 E 是**有界的**；在 X 为局部紧的場合，这个定义与前面所述的局部紧空間中有界集的定义相符合。如果定义在 X 上的实値連續函数 f 能使 $N(f)=\{x:f(x)\neq 0\}$ 为有界集，則按照下述意义称 f 为**一致連續的**：对于每一个正数 ε，存在 e 的邻域 U 使当 $x_1x_2^{-1}\in U$ 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。

如果在拓扑群中，单位元素 e 具有有界邻域，則称拓扑群是**局部有界的**。对于每一个局部有界的拓扑群 X，存在一个局部紧的拓扑群 X^*，使得 X 成为 X^* 的一个稠密子群；X^* 称为 X 的**增补**，它在精确到一个同构的程度內是唯一确定的。局部紧群的任何閉子群和因子群是局部紧群。

第一章

集与类

§1. 集的包含关系

在这本書里面，集这一个名詞总是了解为給定的集的一个子集。除了特别指出用不同記号的地方以外，我們总是以 X 表示这个給定的集。X 的元素称为点；集 X 有时指的是空間，或整个空間。本章的目的是要对有关集論的一些基本概念加以解釋，并叙述一些在以后的章节里經常要用到的主要結論。

如果 x 是 X 中的一个点，E 是 X 的一个子集，我們用下面的記号表示 x 屬于 E（也就是說，x 是 E 中之点的一个）：

$$x \in E;$$

如果 x 不屬于 E，我們就用下面的記号来表示：

$$x \in' E.$$

因此，对于 X 中的每一个点 x，我們有

$$x \in X,$$

而对于 X 中任何一个点 x 都不能有

$$x \in' X.$$

如果 E 和 F 都是 X 的子集，則記号

$$E \subset F \qquad \text{或} \qquad F \supset E$$

表示 E 是 F 的一个子集，也就是說，E 里面的每一个点都屬于 F。因此，对于每一个集 E，我們有

$$E \subset E.$$

設有二集 E 和 F，当它們恰好含有相同的点的时候，而且只在这时候，它們才是**相等的**；換一句話說，当而且只当

$$E\subset F \quad 和 \quad F\subset E$$

时，E 和 F 称为相等．这一个定义为我們指出了一个重要的原則：要証明两个集相等，唯一的方法就是分别証明每一个集里面的任意一点屬于另一个集．

为了便利起見，引进一个不含任何点的集，称为**空集**，我們用 0 这个記号来表示它．对于每一个集 E，我們有

$$0\subset E\subset X;$$

对于每一个点 x，有

$$x\in' 0.$$

除了点集以外，我們常常会遇到以集为元素的集．例如，設 X 为实数軸，則一个区間就是一个集，也就是 X 的一个子集，但一切区間所成的集則是一个以集为元素的集．为了明确起見，以集为元素的集称为**类**．关于集的記号和术語，可以同样地用之于类．例如，設 E 是一个集，而 $\mathbf{E}$ 是一个类，則記号

$$E\in \mathbf{E}$$

表示集 E 屬于类 $\mathbf{E}$（或者說，E 是 $\mathbf{E}$ 的一个成員，E 是 $\mathbf{E}$ 的一个元素）；又如 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{F}$ 是两个类，則記号

$$\mathbf{E}\subset \mathbf{F}$$

表示 $\mathbf{E}$ 是 $\mathbf{F}$ 的一个子类，也就是說，$\mathbf{E}$ 里面的每一个集都屬于 $\mathbf{F}$．

在極其个别的場合下，我們也会遇到以类为元素的集，我們用**总类**这个名詞来称呼它．例如，設 X 是欧几里得平面，$\mathbf{E}_y$ 是由至原点距离为 y 的水平直綫上一切区間組成的集，則每一个 $\mathbf{E}_y$ 是一个类，一切这样的类所成的集就是一个总类．

(1) 在集与集之間，关系 $\subset$ 具有自反性和推移性；当而且只当 X 是空集时，对称性質成立．

(2) 設 $\mathbf{X}$ 是由 X 的一切子集組成的类，当然也包含空集 0 和整个空間

X在內；設x是X的一个点，E是X的一个子集（也就是$\mathbf{X}$的一个成員），$\mathbf{E}$是由X的某些子集組成的类（也就是$\mathbf{X}$的一个子类）。如果u和v互不相关地各代表記号$x, E, X, \mathbf{E}, \mathbf{X}$中之一，則形如

$$u \in v \qquad \text{或} \qquad u \subset v$$

的五十个关系式中，有些关系式一定成立，有些可能成立，有些一定不成立，有些無意义。例如$u \in v$只有当左端是x，右端是E或X，或者左端是E或X而右端是$\mathbf{E}$或$\mathbf{X}$时才有意义。

§2. 併集与交集

設$\mathbf{E}$是由X的子集組成的任意一个类，一切至少屬于$\mathbf{E}$中一个集的点組成一个集，这个集称为$\mathbf{E}$中之集的**併集**；我們用下面的記号来表示它：

$$\bigcup \mathbf{E} \qquad \text{或} \qquad \bigcup \{E: E \in \mathbf{E}\}.$$

第二个記号是一种常用的重要記法的应用。設有一个集，以x表示这个集的一般元素；如果对于每一个x，$\pi(x)$是有关x的一个命題，則記号

$$\{x: \pi(x)\}$$

表示能使命題$\pi(x)$成立的一切点x組成的集。如果$\{\pi_n(x)\}$是有关x的命題的一个叙列，則記号

$$\{x: \pi_1(x), \pi_2(x), \cdots\}$$

表示能使命題

$$\pi_n(x), \qquad n = 1, 2, \cdots$$

全部成立的一切点x組成的集。更一般的，如果对于某一个指标集Γ的每一个元素γ，有一个有关x的命題$\pi_\gamma(x)$，我們用記号

$$\{x: \pi_\gamma(x), \gamma \in \Gamma\}$$

表示对于Γ中每一个γ命題$\pi_\gamma(x)$成立的一切点x組成的集。由此有

$$\{x: x \in E\} = E$$

和

$$\{E: E\in \mathbf{E}\}=\mathbf{E}.$$

更富于啓發性的例子是

$$\{t: 0\leqslant t\leqslant 1\}$$

(＝单位閉区間),

$$\{(x,y): x^2+y^2=1\}$$

(＝平面上单位圓的周界上的点集),和

$$\{n^2: n=1,2,\cdots\}$$

(＝本身为平方的正整数集). 根据这种記法, 一个实数集的上确界和下确界可以分别記为

$$\sup\{x: x\in E\} \qquad 和 \qquad \inf\{x: x\in E\}.$$

記号$\{\cdots\}$一般用来表示集的构成. 例如$\{x,y\}$表示以x和y两个点为其全体元素的集. 必須分清点x和集$\{x\}$的不同意义,后者表示以x为唯一元素的集. 同样, 也应該分清集E和类$\{E\}$的不同意义, 后者表示以E为唯一元素的类. 例如空集0不包含任何点,但类$\{0\}$却包含唯一的一个集,即空集.

对于不同类型的集类的併集,我們用不同的記号来表示它們. 例如,若

$$\mathbf{E}=\{E_1,E_2\},$$

則

$$\bigcup\mathbf{E}=\bigcup\{E_i: i=1,2\}$$

可表为

$$E_1\cup E_2;$$

若

$$\mathbf{E}=\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$$

是一个有限类,則

$$\bigcup\mathbf{E}=\bigcup\{E_i: i=1,2,\cdots,n\}$$

可表为

$$E_1\cup\cdots\cup E_n \quad 或 \quad \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

类似地，如果 $\{E_n\}$ 是集的一个無穷叙列，則这个叙列的各項的併集可表为

$$E_1\cup E_2\cup\cdots \quad 或 \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

更一般的，如果对于某一个指标集 Γ 的每一个元素 γ，有一个对应的集 E_γ，則这个集类

$$\{E_\gamma : \gamma\in\Gamma\}$$

的併集可表为

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma \quad 或 \quad \bigcup_\gamma E_\gamma.$$

如果指标集 Γ 是一个空集，我們作如下的約定：

$$\bigcup_\gamma E_\gamma = 0.$$

空集 0 与整个空間 X 对于併的运算关系由下面的恒等式給出：

$$E\cup 0 = E, \qquad E\cup X = X.$$

一般的，关系式

$$E\subset F$$

成立的必要和充分条件是

$$E\cup F = F.$$

設 $\mathbf{E}$ 是由 X 的子集組成的任意一个类，屬于 $\mathbf{E}$ 中每一个集的点的全体是一个集，这个集称为 $\mathbf{E}$ 中之集的**交集**；我們用下面的記号来表示它：

$$\bigcap \mathbf{E} \quad 或 \quad \bigcap\{E: E\in\mathbf{E}\}.$$

我們用完全类似于用在併集上的記号来表示两个集的交集，有限个或可列無限多个集叙列的交集，以及对应于某一指标集的集类的交集，只要将記号 $\cup$ 和 $\bigcup$ 分别換成 $\cap$ 和 $\bigcap$ 就行了。如果指标集 Γ 是一个空集，我們作如下看来似乎令人感到惊奇的約定：

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma = X.$$

作出这样一个約定的想法之一是：如果 Γ_1 和 Γ_2 是两个（非空的）

指标集，并且 $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$，則显然有

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma_1} E_\gamma \supset \bigcap_{\gamma \in \Gamma_2} E_\gamma,$$

因此对于最小的 Γ 即空的 Γ，我們应以交集中的最大者和它对应。另一个想法乃是由于等式

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2} E_\gamma = \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma_1} E_\gamma\right) \cap \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma_2} E_\gamma\right)$$

对于一切非空的指标集 Γ_1，Γ_2 都成立。如果我們企圖将这个等式推广，使它对于任何 Γ_1 和 Γ_2 都成立，則必須假定对于每一个 Γ 有

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma = \bigcap_{\gamma \in \Gamma \cup 0} E_\gamma = \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma\right) \cap \left(\bigcap_{\gamma \in 0} E_\gamma\right);$$

对于 Γ 中的每一个 γ，令 $E_\gamma = X$，我們得到

$$\bigcap_{\gamma \in 0} E_\gamma = X.$$

0 与 X 对于交的运算关系由下面的恒等式給出：

$$E \cap 0 = 0, \qquad E \cap X = E.$$

一般的，关系式

$$E \subset F$$

成立的必要和充分条件是

$$E \cap F = E.$$

如果两个集 E 和 F 沒有公共点，即

$$E \cap F = 0,$$

則 E 和 F 称为**不相交**。如果在一个类 **E** 里面，任意两个不相同的集不相交，則称 **E** 为**不相交类**；并称 **E** 中之集的併集为**不相交併集**。

在本节之末我們引进一个很有用的概念，就是特征函数的概念。設 E 是 X 的任意子集，在 X 上定义一个函数如下：

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in E, \\ 0, & \text{当 } x \in' E. \end{cases}$$

这个函数 χ_E 称为集 E 的**特征函数**。集和它們的特征函数之間存在一一对应的关系，并且集的一切性質和运算都可以借助于集的特征函数表达出来。作为以大括号表示集的另一个例子，我

們指出：

$$E=\{x:\chi_E(x)=1\}.$$

(1) 併的运算满足交换律和結合律，即

$$E\cup F=F\cup E,\quad E\cup(F\cup G)=(E\cup F)\cup G;$$

交的运算也满足交换律和結合律.

(2) 併与交两种运算中的任意一种满足对于另一种的分配律，即

$$E\cap(F\cup G)=(E\cap F)\cup(E\cap G)$$

和

$$E\cup(F\cap G)=(E\cup F)\cap(E\cup G).$$

并且分配律对于更一般的場合也成立，即

$$F\cap\bigcup\{E: E\in\mathbf{E}\}=\bigcup\{E\cap F: E\in\mathbf{E}\}$$

和

$$F\cup\bigcap\{E: E\in\mathbf{E}\}=\bigcap\{E\cup F: E\in\mathbf{E}\}.$$

(3) X 的一切子集所成的类对于运算 $\cup$ 或 $\cap$ 是否形成一个群?

(4) $\chi_0(x)\equiv 0$, $\chi_X(x)\equiv 1$. 关系式

$$\chi_E(x)\leqslant\chi_F(x)$$

对于 X 中一切 x 都成立的必要和充分条件是 $E\subset F$. 如果 $E\cap F=A$, 并且 $E\cup F=B$, 則有

$$\chi_A=\chi_E\chi_F=\chi_E\cap\chi_F$$

和

$$\chi_B=\chi_E+\chi_F-\chi_A=\chi_E\cup\chi_F.$$

(5) 在(4)里面的两个关于併集与交集的特征函数的等式，能否推广到有限个，可列無限多个，以及任意个集的併集与交集的場合?

§3. 極限，余集，差集

設$\{E_n\}$是一个集叙列. 如果 E^* 是由具有下列性質的一切点 x 組成的集：x 屬于無限多个 E_n，我們称 E^* 为集叙列的**上極限**，記为

$$E^*=\limsup_n E_n.$$

如果 E_* 是由具有下列性質的一切点 x 組成的集：只有有限个 E_n

不含有 x，我們称 E_* 为集叙列的**下極限**，記为

$$E_* = \liminf_n E_n.$$

如果

$$E^* = E_*,$$

則称这个集为集叙列的**極限**，用下面的記号表示它：

$$\lim_n E_n.$$

如果

$$E_n \subset E_{n+1}, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

則称 $\{E_n\}$ 为**增叙列**；若

$$E_n \supset E_{n+1}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

則称$\{E_n\}$为**减叙列**。增叙列和减叙列都叫做**单調叙列**。如果$\{E_n\}$是一个单調叙列，容易驗証，$\lim_n E_n$ 存在，且若 $\{E_n\}$ 是增叙列，則

$$\lim_n E_n = \bigcup_n E_n;$$

若 $\{E_n\}$ 是减叙列，則

$$\lim_n E_n = \bigcap_n E_n.$$

設 E 是 X 的子集，由一切屬于 X 但不屬于 E 的点組成的集称为 E 的**余集**，記为 E'。关于余集的运算，有下面这些恒等式：

$$E \cap E' = 0, \qquad E \cup E' = X,$$

$$0' = X, \qquad (E')' = E, \qquad X' = 0,$$

又

$$\text{若} \quad E \subset F, \qquad \text{則} \quad E' \supset F'.$$

余集对于併集与交集还有一个非常有趣而且十分重要的关系，由下面的两个等式表出：

$$\left(\bigcup\{E\colon E \in \mathbf{E}\}\right)' = \bigcap\{E'\colon E \in \mathbf{E}\},$$

$$\left(\bigcap\{E\colon E \in \mathbf{E}\}\right)' = \bigcup\{E'\colon E \in \mathbf{E}\}.$$

用話来說，就是：併集的余集等于余集的交集；交集的余集等于余集的併集。利用这个事实，再加上关于余集的基本公式，就可以

推出下列極其重要的**对偶原理**:

若有关集的併、交及余集运算的某一关系式成立,如果将式中的記号

$$\cup,\ \cap,\ \subset \text{ 和 } \supset$$

分别换成

$$\cap,\ \cup,\ \supset \text{ 和 } \subset,$$

等号保持不变,并将式中每一个集换成它的余集,由此所得到的新的关系式一定也成立。

設 E 和 F 是 X 的两个子集,由一切屬于 E 但不屬于 F 的点組成的集称为 E 和 F 的**差集**,記为

$$E-F.$$

因为

$$X-F=F',$$

并且

$$E-F=E\cap F',$$

所以我們常称差集 $E-F$ 为 F 在 E 中的**相对余集**。对于一些集的併集或交集取相对余集时,正如同对之取普通的余集一样,应将各个集换成与其对应的相对余集,并将記号 $\cup$ 与 $\cap$ 互换,$\subset$ 与 $\supset$ 互换。例如,

$$E-(F\cup G)=(E-F)\cap(E-G).$$

如果 $E\supset F$,則差集 $E-F$ 叫做**正常的**。

最后,我們引进一种十分重要的关于集的运算,就是二集 E 和 F 的**对称差**,記为

$$E\Delta F,$$

它的定义是:

$$E\Delta F=(E-F)\cup(F-E)=(E\cap F')\cup(E'\cap F).$$

要想很好地掌握关于集的極限、余集与差集的运算,需要一定的練習。在下面的習題里列出了有关这类运算的一些最主要的性

質，希望讀者能全部加以証明。

(1) 对于一切非空的指标集 Γ，等式

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma=\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} E'_\gamma\right)'$$

成立．我們假定

$$\bigcap_{\gamma\in 0} E_\gamma = X$$

的另一个想法就是要使得上面指出的这个等式对于 $\Gamma=0$ 也成立．

(2) 如果 $E_*=\liminf_n E_n$，$E^*=\limsup_n E_n$，則有

$$E_*=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m=E^*.$$

(3) 改变一个集叙列的有限个項，不影响这个集叙列的上極限，下極限和極限(如果它存在的話)．

(4) 如果

$$E_n=\begin{cases}A, & \text{当 } n \text{ 为偶数,}\\ B, & \text{当 } n \text{ 为奇数,}\end{cases}$$

則有

$$\liminf_n E_n=A\cap B,$$
$$\limsup_n E_n=A\cup B.$$

(5) 設 $\{E_n\}$ 是不相交集的叙列，則

$$\lim_n E_n=0.$$

(6) 設 $E_*=\liminf_n E_n$，$E^*=\limsup_n E_n$，則

$$(E_*)'=\limsup_n E'_n,$$
$$(E^*)'=\liminf_n E'_n.$$

更一般的，有

$$F-E_*=\limsup_n(F-E_n),$$
$$F-E^*=\liminf_n(F-E_n).$$

(7)

$$E-F=E-(E\cap F)=(E\cup F)-F,$$
$$E\cap(F-G)=(E\cap F)-(E\cap G),$$
$$(E\cup F)-G=(E-G)\cup(F-G).$$

(8)

$$(E-G)\cap(F-G)=(E\cap F)-G,$$
$$(E-F)-G=E-(F\cup G),$$
$$E-(F-G)=(E-F)\cup(E\cap G),$$
$$(E-F)\cap(G-H)=(E\cap G)-(F\cup H).$$

(9) $$E\Delta F = F\Delta E, \quad E\Delta(F\Delta G) = (E\Delta F)\Delta G,$$
$$E\cap(F\Delta G) = (E\cap F)\Delta(E\cap G),$$
$$E\Delta 0 = E, \quad E\Delta X = E',$$
$$E\Delta E = 0, \quad E\Delta E' = X,$$
$$E\Delta F = (E\cup F) - (E\cap F).$$

(10) X 的一切子集所成的类对于运算 Δ 是否形成一个群?

(11) 如果 $E_* = \lim\inf_n E_n$, $E^* = \lim\sup_n E_n$, 則有
$$\chi_{E_*}(x) = \lim\inf_n \chi_{E_n}(x),$$
$$\chi_{E^*}(x) = \lim\sup_n \chi_{E_n}(x)$$
(这两个等式的右端就是普通数列的下極限和上極限)。

(12) $$\chi_{E'} = 1 - \chi_E,$$
$$\chi_{E-F} = \chi_E(1-\chi_F),$$
$$\chi_{E\Delta F} = |\chi_E - \chi_F| \equiv \chi_E + \chi_F \ (\text{模 } 2).$$

(13) 設 $\{E_n\}$ 是一个集叙列. 令
$$D_1 = E_1, \quad D_2 = D_1\Delta E_2, \quad D_3 = D_2\Delta E_3,$$
一般, 令
$$D_{n+1} = D_n\Delta E_{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$
則集叙列 $\{D_n\}$ 的極限存在的必要和充分条件是 $\lim_n E_n = 0$. 如果我們姑且称 Δ 这个运算为"加法"(参看(12)), 則上述結果可以用話表达如下: 無窮集級数收斂的必要和充分条件是, 它的一般項趋近于 0.

§4. 环与代数

設有一个以集为元素的非空类 $\mathbf{R}$, 如果它能滿足下面的条件:
$$\text{若} \quad E\in\mathbf{R}, \quad F\in\mathbf{R},$$
$$\text{則} \quad E\cup F\in\mathbf{R}, \quad E-F\in\mathbf{R},$$
則称 $\mathbf{R}$ 为环 (或布尔环). 換一句話說, 如果一个非空类对于併、差两种运算是封閉的, 它就是一个环。

空集屬于每一个环 $\mathbf{R}$, 因若
$$E\in\mathbf{R},$$
則有

一.

$$0=E-E\in\mathbf{R}.$$

因为

$$E-F=(E\cup F)-F,$$

所以，如果一个非空类对于併与正常差两种运算是封閉的，它也是一个环。由于

$$E\Delta F=(E-F)\cup(F-E)$$

和

$$E\cap F=(E\cup F)-(E\Delta F),$$

因此环对于对称差与交的运算都是封閉的。利用数学归納法以及併与交两种运算的結合律，我們可以証明，若 $\mathbf{R}$ 是一个环，并且

$$E_i\in\mathbf{R},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

則有

$$\bigcup_{i=1}^n E_i\in\mathbf{R}\qquad 及\qquad \bigcap_{i=1}^n E_i\in\mathbf{R}.$$

只包含一个空集的单元素类 $\{0\}$ 以及由 X 的一切子集組成的类是环的两个極端但有用的例子。設 X 是一个任意的集，X 的一切有限子集組成一个环。下面是一个更富于啓發性的例子：設 X 是实数軸：

$$X=\{x:\ -\infty<x<+\infty\},$$

并設 $\mathbf{R}$ 是由左閉右开的有界区間的一切有限併所組成的类，即由一切形如

$$\bigcup_{i=1}^n\{x:\ -\infty<a_i\leqslant x<b_i<+\infty\}$$

的集組成的类，則 $\mathbf{R}$ 是一个环。

应該指出，在环的定义里，併与交两种运算所占的地位是不对称的。虽然环对于交的运算是封閉的，但是封閉于交与差两种运算的类却不一定封閉于併的运算。不过，如果一个非空类对于交，正常差，以及不相交的併三种运算是封閉的，則这个类是一个环。証明如下：

$$E\cup F=[E-(E\cap F)]\cup[F-(E\cap F)]\cup(E\cap F).$$

为使併与交两种运算在环的定义里所占的地位比較对称起見，不难給出环的另一个定义：我們可以将封閉于交与对称差两种运算的非空类定义为环。証明如下：

$$E\cup F=(E\Delta F)\Delta(E\cap F),\quad E-F=E\Delta(E\cap F).$$

如果在这个定义里面，将交的运算换为併的运算，就得到了环的另一个定义：环是封閉于併与对称差两种运算的非空类。

設有一个以集为元素的非空类 $\mathbf{R}$，如果它能滿足下面两个条件：

(a) 若 $E\in\mathbf{R}$, $F\in\mathbf{R}$, 則 $E\cup F\in\mathbf{R}$,

(b) 若 $E\in\mathbf{R}$, 則 $E'\in\mathbf{R}$,

則称 $\mathbf{R}$ 为**代数(或布尔代数)**。

因为

$$E-F=E\cap F'=(E'\cup F)',$$

所以代数一定是环。环和代数两个概念之間的关系是很簡单的：代数就是包含 X 的一个环。証明如下：因为

$$E'=X-E,$$

所以包含 X 的环一定是代数；另一方面，設 $\mathbf{R}$ 是一个代数，并設

$$E\in\mathbf{R}$$

(我們記得 $\mathbf{R}$ 是非空的)，則有

$$X=E\cup E'\in\mathbf{R}.$$

(1) 下面的一些类是环或代数的几个例子：

(1a) X 是 n 維欧几里得空間；$\mathbf{E}$ 是由形如

$$\{(x_1,\cdots,x_n):-\infty<a_i\leqslant x_i<b_i<+\infty,\quad i=1,\cdots,n\}$$

的半閉"区間"的一切有限併組成的类.

(1b) X 是不可列集；$\mathbf{E}$ 是由 X 的一切有限或可列子集組成的类.

(1c) X 是不可列集；$\mathbf{E}$ 是一个类，它的元素或是有限或可列集，或是以有限或可列集为余集的集.

(2) 在哪几种拓扑空間里面，由一切开集組成的类 $\mathbf{E}$ 是一个环?

(3) 任意多个环[代数]的交仍是一个环[代数].

(4) 設 $\mathbf{R}$ 是一个环，如果对于 $\mathbf{R}$ 的元素 E 和 F，我們定义

$$E \odot F = E \cap F \text{ 和 } E \oplus F = E \Delta F,$$

則对于"加法"($\oplus$)和"乘法"($\odot$)两种运算，$\mathbf{R}$ 形成一个在代数学意义下的环．如果代数环的每一个元素 E 满足关系式 $E \odot E = E$，則这种代数环也叫做布尔环．正是由于集的布尔环与一般的布尔环之間存在着十分密切的关系，才使我們在集論里面采用环这一个名詞．

(5) 設 $\mathbf{R}$ 是一个环；如果 $\mathbf{A}$ 是由一切这样的集 E 組成的类：

$$\text{或是 } E \in \mathbf{R}, \quad \text{或是 } E' \in \mathbf{R},$$

則 $\mathbf{A}$ 是一个代数．

(6) 設有一个以集为元素的非空类 $\mathbf{P}$，如果它能满足下面两个条件：

(6a) 若 $E \in \mathbf{P}$, $F \in \mathbf{P}$，則 $E \cap F \in \mathbf{P}$，

(6b) 若 $E \in \mathbf{P}$, $F \in \mathbf{P}$，且 $E \subset F$，則必存在 $\mathbf{P}$ 中之集的一个有限类 $\{C_0, C_1, \cdots, C_n\}$ 使得

$$E = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_n = F,$$

并且

$$D_i = C_i - C_{i-1} \in \mathbf{P}, \qquad i = 1, \cdots, n,$$

則称 $\mathbf{P}$ 为**半环**．空集屬于每一个半环．如果 X 是任意的一个集，則由空集以及一切只含一个点的集(即形如 $\{x\}$ 的集，其中 $x \in X$)組成的类 $\mathbf{P}$ 是一个半环．如果 X 是实数軸，則由一切左閉右开的有界区間組成的类是一个半环．

§5. 由集类产生的环和 σ-环

定理 1. 設 $\mathbf{E}$ 是任意的集类，則必存在唯一的一个环 $\mathbf{R}_0$ 使得 $\mathbf{R}_0 \supset \mathbf{E}$，并且对于任何其他包含 $\mathbf{E}$ 的环 $\mathbf{R}$ 都有 $\mathbf{R}_0 \subset \mathbf{R}$．

环 $\mathbf{R}_0$ 是包含 $\mathbf{E}$ 的最小的环，称为由 $\mathbf{E}$ **产生**的环；我們用記号 $\mathbf{R}(\mathbf{E})$ 来表示它．

証明．因为由 X 的一切子集組成的类是一个环，这就說明了至少有一个包含 $\mathbf{E}$ 的环存在．此外，任意多个环的交仍是一个环(見4.3)，容易看出，包含 $\mathbf{E}$ 的一切环之交就是我們所求的环 $\mathbf{R}_0$．▌

定理 2. 設 $\mathbf{E}$ 是任意的集类，則 $\mathbf{R}(\mathbf{E})$ 中每一个集可以被 $\mathbf{E}$ 中有限个集的併集所遮盖。

証明。能被 $\mathbf{E}$ 中集的有限併所遮盖的一切集組成的类是一个环；因为这个环包含 $\mathbf{E}$，所以它也包含 $\mathbf{R}(\mathbf{E})$。 |

定理 3. 設 $\mathbf{E}$ 是以集为元素的可列类，則 $\mathbf{R}(\mathbf{E})$ 也是可列的。

証明。对于任意一个集类 $\mathbf{C}$，令 $\mathbf{C}^*$ 为由 $\mathbf{C}$ 中之集的差集的一切有限併組成的类。显然，如果 $\mathbf{C}$ 是可列的，則 $\mathbf{C}^*$ 也是可列的；且若

$$0 \in \mathbf{C},$$

則有

$$\mathbf{C} \subset \mathbf{C}^*.$$

为了証明这个定理，不丧失任何普遍性，我們可以假定

$$0 \in \mathbf{E}.$$

令

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}, \qquad \mathbf{E}_n = \mathbf{E}_{n-1}^*, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

显然有

$$\mathbf{E} \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_n \subset \mathbf{R}(\mathbf{E}),$$

并且类

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_n$$ 可列个可列集的并.

是可列的。如果我們能够說明 $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_n$ 是一个环，那末定理的証明就完成了。

因为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \subset \mathbf{E}_1 \subset \mathbf{E}_2 \subset \cdots,$$

所以如果 A 和 B 是 $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_n$ 中任意两个集，則必存在正整数 n 使得 A 和 B 都属于 $\mathbf{E}_n$。我們有

$$A - B \in \mathbf{E}_{n+1};$$

并且由于

$$0 \in \mathbf{E}_0 \subset \mathbf{E}_n,$$

因此

$$A\cup B=(A-0)\cup(B-0)\in \mathbf{E}_{n+1}.$$

我們已經証明了 $A-B$ 和 $A\cup B$ 都屬于 $\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}_n$，即 $\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}_n$ 对于併与差两种运算的确是封閉的。 ∎

設有一个以集为元素的非空类 S，如果它能滿足下面两个条件：

(a) 若 $E\in \mathbf{S}$, $F\in \mathbf{S}$, 則 $E-F\in \mathbf{S}$,

(b) 若 $E_i\in \mathbf{S}$, $i=1,2,\cdots$, 則 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\in \mathbf{S}$,

則称 S 为 σ-环。σ-环也可以定义为封閉于可列併的运算的环。如果 S 是一个 σ-环，并設

$$E_i\in S,\quad i=1,2,\cdots,\quad E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,$$

則等式

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i=E-\bigcup_{i=1}^{\infty}(E-E_i)$$

說明了

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\in \mathbf{S},$$

也就是說，σ-环对于可列交的运算是封閉的。由此可知(參看3.2)，如果 S 是一个 σ-环，并且

$$E_i\in \mathbf{S},\quad i=1,2,\cdots,$$

則 $\liminf_i E_i$ 和 $\limsup_i E_i$ 都屬于 S。

在定理 1 和它的証明里，如果将"环"都改成"σ-环"，定理仍然成立。因此，我們可以称包含类 E 的最小 σ-环为由 E 产生的 σ-环，記为 S(E)。

定理 4. 設 E 是任意的集类，E 是 S=S(E) 里的集，則必存在 E 的可列子类 D，使得 $E\in$S(D)。

証明。由 E 的可列子类产生的、S 的 σ-子环的全体，它們的併是一个 σ-环。这个 σ-环包含 E，但被 S 所包，因此它就是 S。 ∎

設 E 是由 X 的子集組成的任意一个类，A 是 X 的一个固定

子集，則記号

$$\mathbf{E}\cap A$$

表示由一切形如 $E\cap A$ 的集組成的类，其中 $E\in\mathbf{E}$。

定理 5. 設 $\mathbf{E}$ 是任意的集类，A 是 X 的任意子集，則

$$\mathbf{S}(\mathbf{E})\cap A=\mathbf{S}(\mathbf{E}\cap A).$$

証明. 設 $\mathbf{C}$ 是由一切形如 $B\cup(C-A)$ 的集組成的类，其中

$$B\in\mathbf{S}(\mathbf{E}\cap A),\quad C\in\mathbf{S}(\mathbf{E});$$

不难驗証：$\mathbf{C}$ 是一个 σ-环. 設 $E\in\mathbf{E}$，則关系式

$$E=(E\cap A)\cup(E-A)$$

和

$$E\cap A\in\mathbf{E}\cap A\subset\mathbf{S}(\mathbf{E}\cap A)$$

說明了 $E\in\mathbf{C}$，因此

$$\mathbf{E}\subset\mathbf{C}.$$

由此有

$$\mathbf{S}(\mathbf{E})\subset\mathbf{C},$$

因而

$$\mathbf{S}(\mathbf{E})\cap A\subset\mathbf{C}\cap A.$$

但因等式

$$\mathbf{C}\cap A=\mathbf{S}(\mathbf{E}\cap A)$$

显然成立，所以

$$\mathbf{S}(\mathbf{E})\cap A\subset\mathbf{S}(\mathbf{E}\cap A).$$

另一方面，由于 $\mathbf{S}(\mathbf{E})\cap A$ 是一个 σ-环，并且

$$\mathbf{E}\cap A\subset\mathbf{S}(\mathbf{E})\cap A,$$

所以

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}\cap A)\subset\mathbf{S}(\mathbf{E})\cap A.\quad \blacksquare$$

(1) 在下面的例子里，指出由类 $\mathbf{E}$ 产生的环：

(1a) E 是 X 的一个固定子集，$\mathbf{E}=\{E\}$ 是只包含一个元素 E 的类.

(1b) E 是 X 的一个固定子集，$\mathbf{E}$ 是由包含 E 的一切集組成的类，即

$\mathbf{E}=\{F: E\subset F\}$.

(1c) $\mathbf{E}$ 是由恰好包含两个不同点的一切集組成的类.

(2) 設有一个以集为元素的类 $\mathbf{L}$, 如果它能滿足下面两个条件:

$$0\in\mathbf{L},$$

$$\text{若}\quad E\in\mathbf{L},\ F\in\mathbf{L},\quad \text{則}\ E\cup F\in\mathbf{L},\ E\cap F\in\mathbf{L},$$

則称 $\mathbf{L}$ 为絡. 若 $\mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathbf{L})$ 是由一切形如 $F-E$ 的集組成的类, 其中 $E\in\mathbf{L}$, $F\in\mathbf{L}$, 并且 $E\subset F$; 則 $\mathbf{P}$ 是一个半环(參看 4.6). (提示: 設有 $\mathbf{P}$ 里面的两个集 D_1, D_2, 它們可以表为 $\mathbf{L}$ 中之集的正常差的形式:

$$D_i=F_i-E_i,\quad i=1,2,$$

并設 $D_1\supset D_2$. 則 $F_2-E_2\subset C\subset F_1-E_1$, 其中

$$C=(F_1\cap F_2)-(E_1\cap F_2)$$

或

$$C=F_1-[E_1\cup(F_1\cap E_2)].)$$

$\mathbf{P}$ 是不是一个环?

(3) 設 $\mathbf{P}$ 是一个半环, $\mathbf{R}$ 是由一切形如 $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ 的集組成的类, 其中 $\{E_1,\cdots,E_n\}$ 是 $\mathbf{P}$ 中不相交集的任意一个有限类.

(3a) $\mathbf{R}$ 对于有限交与不相交的併两种运算是封閉的.

(3b) 若 $E\in\mathbf{P}$, $F\in\mathbf{P}$, 并且 $E\subset F$, 則 $F-E\in\mathbf{R}$.

(3c) 若 $E\in\mathbf{P}$, $F\in\mathbf{R}$, 并且 $E\subset F$, 則 $F-E\in\mathbf{R}$.

(3d) 若 $E\in\mathbf{R}$, $F\in\mathbf{R}$, 并且 $E\subset F$, 則 $F-E\in\mathbf{R}$.

(3e) $\mathbf{R}=\mathbf{R}(\mathbf{P})$. 由此可知,如果一个半环对于併的运算是封閉的,它就是一个环.

(4) 和定理 1 完全相仿的关于代数的定理也成立. 这一个事实可以从下面的方式得出: 在定理 1 的証明里, 将"环"都改成"代数"; 也可以利用 4.5 推出.

(5) 設 $\mathbf{P}$ 是一个半环, 并且 $\mathbf{R}=\mathbf{R}(\mathbf{P})$, 則 $\mathbf{S}(\mathbf{R})=\mathbf{S}(\mathbf{P})$.

(6) 如果一个非空类对于对称差与可列交两种运算是封閉的, 这个类是不是一个 σ-环?

(7) 設 $\mathbf{E}$ 是一个非空类, 則 $\mathbf{S}(\mathbf{E})$ 中每一个集可以被 $\mathbf{E}$ 中可列个集的併集所遮盖(參看定理 2).

(8) 設 $\mathbf{E}$ 是一个以集为元素的無限类，则 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{R}(\mathbf{E})$ 具有同样的势（参看定理3）。

(9) 用下面的办法可以得出和定理3相仿的关于 σ-环的定理（参看(8)）。設 $\mathbf{E}$ 是包含0的任意一个集类，令 $\mathbf{E}_0=\mathbf{E}$，并且对于任意的一个序数 $\alpha>0$，令

$$\mathbf{E}_\alpha=(\bigcup\{\mathbf{E}_\beta:\ \beta<\alpha\})^*,$$

其中 $\mathbf{C}^*$ 表示由 $\mathbf{C}$ 中之集的差集的一切有限併組成的类。

(9a) 若 $0<\alpha<\beta$，則 $\mathbf{E}\subset\mathbf{E}_\alpha\subset\mathbf{E}_\beta\subset\mathbf{S}(\mathbf{E})$。

(9b) 若 Ω 是第一个不可列的序数，則 $\mathbf{S}(\mathbf{E})=\bigcup\{\mathbf{E}_\alpha:\ \alpha<\Omega\}$。

(9c) 若 $\mathbf{E}$ 的势不超过連續統的势，則 $\mathbf{S}(\mathbf{E})$ 的势也不超过連續統的势。

(10) 关于环有甚么样的和定理4,5相仿的定理？

§6. 单　調　类

要想求得由一个已知集类产生的 σ-环，我們并沒有任何一种构造性的方法。但是对于另外一种比 σ-环所受限制較少的集类加以研究，我們可以得到有关由某一集类产生的 σ-环之构造的定理，它在技术上是很有用的。

設有一个以集为元素的类 $\mathbf{M}$，如果对于 $\mathbf{M}$ 中之集的每一个单調叙列 $\{E_n\}$ 都有

$$\lim_n E_n\in\mathbf{M},$$

則称 $\mathbf{M}$ 是单調的。

正如同在討論环和 σ-环的場合一样，因为由 X 的一切子集組成的类是一个单調类，并且任意多个单調类的交仍是一个单調类，所以我們可以称包含类 $\mathbf{E}$ 的最小单調类为由 $\mathbf{E}$ **产生**的单調类，記为 $\mathbf{M}(\mathbf{E})$。

定理1. σ-环是单調类；单調环是 σ-环。

証明. 定理前半部分的正确性是很显然的。要証明定理的后半部分，我們必須說明，一个单調环对于可列併的运算是封閉的。設 $\mathbf{M}$ 是一个单調环，并設

$$E_i \in \mathbf{M}, \qquad i=1,2,\cdots,$$

則因 $\mathbf{M}$ 是一个环，所以有

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathbf{M}, \qquad n=1,2,\cdots.$$

由于 $\{\bigcup_{i=1}^{n} E_i\}$ 是一个单調增叙列，它的併是 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$，根据 $\mathbf{M}$ 是单調类的假設，就有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbf{M}. \quad \blacksquare$$

定理 2. 設 $\mathbf{R}$ 是一个环，則 $\mathbf{M}(\mathbf{R})=\mathbf{S}(\mathbf{R})$。由此可知：包含环 $\mathbf{R}$ 的单調类一定也包含 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$。

証明. 由于 σ-环是单調类，并且 $\mathbf{S}(\mathbf{R})\supset\mathbf{R}$，因此

$$\mathbf{S}(\mathbf{R})\supset\mathbf{M}=\mathbf{M}(\mathbf{R}).$$

如果我們能够証明 $\mathbf{M}$ 是一个 σ-环，再根据 $\mathbf{M}(\mathbf{R})\supset\mathbf{R}$，就可以推出 $\mathbf{M}(\mathbf{R})\supset\mathbf{S}(\mathbf{R})$，那末定理的証明就完成了.

对于任意一个集 F，令 $\mathbf{K}(F)$ 为由滿足下列条件的一切集 E 組成的类：$E-F$，$F-E$，以及 $E\cup F$ 都屬于 $\mathbf{M}$。容易看出，由于在 $\mathbf{K}(F)$ 的定义中，E 和 F 所占的地位是对称的，所以关系式

$$E\in\mathbf{K}(F) \quad 和 \quad F\in\mathbf{K}(E)$$

是等价的。設 $\{E_n\}$ 是 $\mathbf{K}(F)$ 中集的单調叙列，則有

$$\lim_n E_n - F = \lim_n (E_n - F) \in \mathbf{M},$$

$$F - \lim_n E_n = \lim_n (F - E_n) \in \mathbf{M},$$

$$F \cup \lim_n E_n = \lim_n (F \cup E_n) \in \mathbf{M},$$

因此，若 $\mathbf{K}(F)$ 是非空的，則它是一个单調类.

若 $E\in\mathbf{R}$，$F\in\mathbf{R}$，則根据环的定义，$E\in\mathbf{K}(F)$。这个关系式对于 $\mathbf{R}$ 中每一个 E 都成立，因此，$\mathbf{R}\subset\mathbf{K}(F)$。因为 $\mathbf{M}$ 是包含 $\mathbf{R}$ 的最小单調类，所以

$$\mathbf{M}\subset\mathbf{K}(F).$$

由此可見，若 $E\in\mathbf{M}$，$F\in\mathbf{R}$，則 $E\in\mathbf{K}(F)$；从而 $F\in\mathbf{K}(E)$。这个关系式对于 $\mathbf{R}$ 中每一个 F 都成立，根据和上面相同的理由，我們有

$$\mathbf{M}\subset\mathbf{K}(E).$$

上面这个关系式对于 $\mathbf{M}$ 中每一个 E 都成立，这就是說，$\mathbf{M}$ 是一个环。由定理 1 可知，$\mathbf{M}$ 是一个 σ-环。 ▌

虽然这一条定理并沒有告訴我們，如何去建立由已知环 $\mathbf{R}$ 产生的 σ-环；但是它告訴了我們，要想研究由 $\mathbf{R}$ 产生的 σ-环，只要研究由 $\mathbf{R}$ 产生的单調类就行了。在許多应用的場合下，这是不难做到的。

(1) 定理 2 对于半环是否成立？

(2) 設 $\mathbf{N}$ 是一个集类，如果它对于单調遞减的可列交以及不相交的可列併两种运算是封閉的，則称 $\mathbf{N}$ 是**正規**的. σ-环是正規类；正規环是 σ-环.

(3) 如果用記号 $\mathbf{N(E)}$ 表示包含类 $\mathbf{E}$ 的最小正規类，則对于任意一个半环 $\mathbf{P}$，有 $\mathbf{N(P)=S(P)}$.

(4) 設有一个以集为元素的非空类，如果它对于余集与可列併两种运算是封閉的，我們称这个类为 **σ-代数**. σ-代数是包含 X 的 σ-环. 如果 $\mathbf{R}$ 是一个代数，則 $\mathbf{M(R)}$ 与包含 $\mathbf{R}$ 的最小 σ-代数相等. 若 $\mathbf{R}$ 是一个环，这个結論是否正确？

(5) 在下面的每一个例子里，指出由 $\mathbf{E}$ 产生的 σ-代数、σ-环以及单調类：

(5a) X 是一个任意的集，P 是 X 中之点的一个任意的排列，即 P 是 X 在它自身之上的一个一一变换. 如果 E 是 X 的一个子集，若对于 $x\in E$，有 $P(x)\in E$ 和 $P^{-1}(x)\in E$，我們称 E 对于 P 是**不变的**. $\mathbf{E}$ 代表由一切不变集組成的类.

(5b) X 和 Y 是两个任意的集，T 是 X 在 Y 內的任意一个变换（不一定是一一变换）. 如果 E 是 Y 的子集，我們用記号 $T^{-1}(E)$ 表示能使 $T(x)\in E$ 的 X 中一切点 x 組成的集. $\mathbf{E}$ 代表由一切形如 $T^{-1}(E)$ 的集組成的类，其中 E 是 Y 的任意子集.

(5c) X 是一个拓扑空間；$\mathbf{E}$ 是由一切屬于第一种范疇的集組成的类.

(5d) X 是三維歐几里得空間. 設 E 是 X 的子集，如果它能滿足下面的条件：

$$\text{若}\quad (x,y,z)\in E,\qquad \text{則}\quad (x,y,\hat{z})\in E,$$

其中 $\hat{z}$ 是任意实数，我們称 E 为**柱面**. $\mathbf{E}$ 代表由一切柱面組成的类.

(5e) X 是歐几里得平面；$\mathbf{E}$ 是由这样的集組成的类：每一个集能被有限条或可列無限多条水平直綫所遮蓋，

第二章

測度和外測度

§7. 环上的測度

以集类为定义域的函数称为**集函数**. 設 μ 是定义在集类 **E** 上的广义实值集函数(即可以取得有限或無限值的函数), 如果它能滿足下面的条件:

若 $E \in \mathbf{E}$, $F \in \mathbf{E}$, $E \cup F \in \mathbf{E}$, 且 $E \cap F = 0$,

則 $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$,

則称 μ 具有**可加性**. 設 μ 是定义在集类 **E** 上的广义实值集函数, 如果对于 **E** 的任何不相交有限子类 $\{E_1, \cdots, E_n\}$, 若它的併集也在 **E** 中, 有

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i),$$

則称 μ 具有**有限可加性**. 設 μ 是定义在集类 **E** 上的广义实值集函数, 如果对于 **E** 中之集的任何不相交叙列 $\{E_n\}$, 若它的并集也在 **E** 中, 有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

則称 μ 具有**可列可加性**.

設 μ 是定义在环 **R** 上的非负广义实值集函数, 如果它具有可列可加性, 并且 $\mu(0) = 0$, 則称 μ 为**測度**.

由于等式

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cup \cdots \cup E_n \cup 0 \cup 0 \cup \cdots,$$

可知測度具有有限可加性．下面是測度的一个十分簡单的例子．設 f 是某集 X 中之点的一个非負广义实值函数；$\mathbf{R}$ 是由 X 的一切有限子集組成的环；測度 μ 由下面的式子确定：

$$\mu(\{x_1, \cdots, x_n\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i), \qquad \text{且} \qquad \mu(0) = 0.$$

比較重要的例子将在以下几节中出現．

設 μ 是环 $\mathbf{R}$ 上的測度，E 是 $\mathbf{R}$ 中的一个集，若有 $\mu(E) < \infty$，則称 E 具有**有限測度**；如果存在 $\mathbf{R}$ 的一个集叙列 $\{E_n\}$ 使

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \qquad \text{且} \qquad \mu(E_n) < \infty, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

則称 E 的測度是 **σ-有限的**．如果 $\mathbf{R}$ 中每一个集 E 的測度都是有限[或 σ-有限]的，則称測度 μ 在 $\mathbf{R}$ 上是**有限**[或 **σ-有限**]的．如果 $X \in \mathbf{R}$（即 $\mathbf{R}$ 是一个代数），并且 $\mu(X)$ 是有限或 σ-有限的，則分别称 μ 是**全有限**或**全 σ-有限**的．設 μ 是一个測度，如果它能满足下列条件：

$$\text{若} \quad E \in \mathbf{R}, \qquad F \subset E, \qquad \text{且} \qquad \mu(E) = 0,$$
$$\text{則} \quad F \in \mathbf{R},$$

則称 μ 为**完全測度**．

(1) 設 μ 是定义在环 $\mathbf{R}$ 上的非負广义实值集函数，如果它具有可加性，并且 $\mathbf{R}$ 中至少有一个集 E 能使 $\mu(E) < \infty$，則 $\mu(0) = 0$．

(2) 設 $\mathbf{E}$ 是一个非空类，μ 是 $\mathbf{R}(\mathbf{E})$ 上的一个測度．如果对于任何 $E \in \mathbf{E}$ 都有 $\mu(E) < \infty$，則 μ 在 $\mathbf{R}(\mathbf{E})$ 上是有限的（参看 §5 定理 2）．

(3) 設 μ 是 σ-环上的一个測度，則具有有限測度的一切集的类是一个环，具有 σ-有限測度的一切集的类是一个 σ-环．如果我們再假設 μ 是 σ-有限的，則具有有限測度的一切集的类是 σ-环的必要和充分条件是，μ 为有限的．如果 μ 不是 σ-有限的，上述結論是否成立？

(4) 設 μ 是 σ-环 $\mathbf{S}$ 上的一个測度，E 是 $\mathbf{S}$ 中具有 σ-有限測度的一个

集。若 D 是 S 中之集的一个不相交类，則 D 中最多有可列無限多个集 D 滿足关系式 $\mu(E\cap D)\neq 0$.（提示：首先假定 $\mu(E)<\infty$；对于每一个正整数 n，考虑类$\{D: D\in \mathbf{D}, \mu(E\cap D)\geq \frac{1}{n}\}$.）

(5) 設 μ 是定义在环 R 上的非負广义实值集函数，如果它具有可加性，并且 $\mu(0)=0$，則 μ 具有有限可加性。同样的叙述对于半环 P 也成立，但証明却不很簡单，可由下列步驟得到。設有一个 P 中不相交集的有限类 $\{E_1, \cdots, E_n\}$，如果它的并集 E 也在 P 中，則称这个类是 E 的一个**分割**。設$\{E_i\}$是 E 的一个分割，若对于 P 中每一个集 F 都有

$$\mu(E\cap F)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i\cap F),$$

則称$\{E_i\}$是一个 **μ-分割**。設$\{E_i\}$和$\{F_j\}$是 E 的两个分割，如果每一个 E_i 被 F_j 之一所包，則称$\{E_i\}$是$\{F_j\}$的一个**子分割**。

(5a) 若$\{E_i\}$和$\{F_j\}$是 E 的两个分割，称一切形如 $E_i\cap F_j$ 的集組成的类为$\{E_i\}$和$\{F_j\}$的**乘积**，則这个乘积也是 E 的一个分割。

(5b) 若分割$\{E_i\}$有一个子分割是 μ-分割，則$\{E_i\}$是一个 μ-分割。

(5c) 两个 μ-分割的乘积还是一个 μ-分割。

(5d) 若 $E=C_0\subset C_1\subset\cdots\subset C_n=F$，其中 $C_i\in \mathbf{P}, i=0,1,\cdots,n$，并且

$$D_i=C_i-C_{i-1}\in \mathbf{P},\qquad i=1,\cdots,n,$$

則$\{E, D_1, \cdots, D_n\}$是 F 的一个 μ-分割。

(5e) 若 $E\in \mathbf{P}$，則 E 的每一个分割都是 μ-分割。

§8. 区間上的測度

为了闡明測度論的基本概念，我們現在来討論一个十分重要的典型的測度問題。在本节內，空間 X 总是代表实数軸。我們以 P 表示由左閉右开的一切有界区間所組成的类，即由一切形如

$$\{x:\ -\infty<a\leq x<b<+\infty\}$$

的集組成的类；并以 R 表示由 P 中之集的一切不相交的有限併所組成的类，即由一切形如

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{x:\ -\infty<a_i\leq x<b_i<+\infty\}$$

的集組成的类。(容易驗証,任何具有这种形式的併集,可以写成具有同样形式的不相交的併集。)

为了說話简便起見,我們用"半閉区間"这个名詞来代替"左閉右开的有界区間"。我們采用半閉区間,而不采用开区間或閉区間,这只是为了技术上的方便。例如,設 a, b, c 和 d 是四个实数,$-\infty<a<b<c<d<+\infty$,则开区間

$$\{x:\ a<x<d\}\ 和\ \{x:\ b<x<c\}$$

的差集既不是一个开区間,也不是开区間的有限併。对于閉区間,也会遇到类似的現象。但对于半閉区間却不会發生这样的問題,我們采用半閉区間也正是由于它的这个优点。

和平常一样,我們以$[a,b]$表示閉区間:

$$[a,b]=\{x:\ a\leqslant x\leqslant b\},$$

以$[a,b)$表示半閉区間:

$$[a,b)=\{x:\ a\leqslant x<b\},$$

以(a,b)表示开区間:

$$(a,b)=\{x:\ a<x<b\}.$$

在这些記号里面,我們总是假定 $a\leqslant b$。

在半閉区間类 $\mathbf{P}$ 上定义一个集函数 μ 如下:

$$\mu([a,b))=b-a.$$

容易看出,当 $a=b$ 时,区間$[a,b)$成为空集,因此

$$\mu(0)=0.$$

現在我們来探討集函数 μ 对于 $\mathbf{P}$ 中之集的一些关系。

定理 1. 設$\{E_1,\cdots,E_n\}$是$\mathbf{P}$中不相交集的有限类,并且$E_i\subset E_0$,$i=1,\cdots,n$,其中 $E_0\in\mathbf{P}$,則

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)\leqslant\mu(E_0).$$

証明。令 $E_i=[a_i,b_i)$,$i=0,1,\cdots,n$。不丧失普遍性,我們可以假定

$$a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n.$$

根据定理中关于$\{E_1, \cdots, E_n\}$的假設，就有

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_0,$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - b_i) =$$

$$= b_n - a_1 \leqslant b_0 - a_0 = \mu(E_0). \quad \blacksquare$$

定理 2. 設閉区間 $F_0 = [a_0, b_0]$ 被有限个有界开区間

$$U_i = (a_i, b_i), \qquad i = 1, \cdots, n$$

的併集所包，則

$$b_0 - a_0 < \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

証明．設 k_1 是一个自然数使 $a_0 \in U_{k_1}$．若 $b_{k_1} \leqslant b_0$，則令 k_2 是自然数使 $b_{k_1} \in U_{k_2}$；若 $b_{k_2} \leqslant b_0$，則令 k_3 是自然数使 $b_{k_2} \in U_{k_3}$；依此类推，直到 k_m 能使 $b_{k_m} > b_0$ 为止．不丧失普遍性，我們可以假定 $m = n$，且 $U_{k_i} = U_i$，$i = 1, \cdots, n$；这是因为我們只需略去那些多余的 U_i，并改变一下号碼就行了．换一句話說，我們可以假定

$$a_1 < a_0 < b_1, \qquad a_n < b_0 < b_n,$$

$$a_{i+1} < b_i < b_{i+1}, \quad i = 1, \cdots, n-1;$$

因此有

$$b_0 - a_0 < b_n - a_1 = (b_1 - a_1) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} (b_{i+1} - b_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i). \quad \blacksquare$$

定理 3. 設$\{E_0, E_1, E_2, \cdots\}$是 $\mathbf{P}$ 中之集的叙列，其中

$$E_0 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

則

$$\mu(E_0)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i).$$

証明. 令 $E_i=[a_i,b_i)$, $i=0, 1, 2, \cdots$. 若 $a_0=b_0$, 定理显然成立。若 $a_0<b_0$, 取任意正数 ε 使 $\varepsilon<b_0-a_0$. 对于任意正数 δ, 令

$$F_0=[a_0,b_0-\varepsilon],$$

且

$$U_i=\left(a_i-\frac{\delta}{2^i},b_i\right),\qquad i=1,2,\cdots,$$

則

$$F_0\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i,$$

因此,根据海尼-波雷耳定理,存在正整数 n 使得 $F_0\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_i$. 根据定理 2, 我們得到

$$\mu(E_0)-\varepsilon=(b_0-a_0)-\varepsilon<$$

$$<\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-a_i+\frac{\delta}{2^i}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)+\delta.$$

因为 ε 和 δ 是任意的,由此即得定理的結論。 ▎

定理 4. 集函数 μ 在 **P** 上具有可列可加性。

証明. 設 $\{E_i\}$ 是 **P** 中之集的一个不相交叙列, 它的併集 E 也在 **P** 中,则由定理 1 有

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)\leqslant\mu(E),\qquad n=1,2,\cdots.$$

因此,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)\leqslant\mu(E);$$

再利用定理 3 就得到所要的結論。 ▎

定理 5. 在 **R** 上存在唯一的一个有限測度 $\bar{\mu}$, 使当 $E\in$ **P** 时有 $\bar{\mu}(E)=\mu(E)$.

証明。我們知道，R 中每一个集 E 可以表为 P 中有限个不相交集的併集。設

$$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i \qquad \text{和} \qquad E=\bigcup_{j=1}^{m}F_j$$

是同一个集 E 的两个这样的表示式。于是，对于任意的 $i, i=1,\cdots,n$，P 中的集 E_i 可以表为 P 中有限个不相交集的併集如下：

$$E_i=\bigcup_{j=1}^{m}(E_i\cap F_j),$$

由于 μ 具有有限可加性，所以

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mu(E_i\cap F_j).$$

同理有

$$\sum_{j=1}^{m}\mu(F_j)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i\cap F_j).$$

由此可見，若 $E\in$ R，且 $\{E_1,\cdots,E_n\}$ 是 P 中不相交集的有限类，它的併集是 E，則等式

$$\bar{\mu}(E)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)$$

无歧义地定出了在 R 上的一个集函数 $\bar{\mu}$。

由 $\bar{\mu}$ 的定义可以看出，$\bar{\mu}$ 在 P 上与 μ 相合，并且具有有限可加性。根据这两个性質，显然可見 $\bar{\mu}$ 是唯一的。剩下需要証明的就是 $\bar{\mu}$ 的可列可加性了。

設 $\{E_i\}$ 是 R 中不相交集的叙列，它的併集 E 也在 R 中；于是每一个 E_i 可以表为 P 中有限个不相交集的併集：

$$E_i=\bigcup_j E_{ij},$$

且

$$\bar{\mu}(E_i)=\sum_j\mu(E_{ij}).$$

先設 $E\in$ P，則因 E_{ij} 的全体組成一个不相交的可列类，根据 μ 的可

列可加性就有

$$\bar{\mu}(E)=\mu(E)=\sum_i\sum_j\mu(E_{ij})=\sum_i\bar{\mu}(E_i).$$

在一般的場合，若 E 是 $\mathbf{P}$ 中有限个不相交集的併集：

$$E=\bigcup_k F_k,$$

則利用剛才得到的結果，我們有

$$\bar{\mu}(E)=\sum_k\bar{\mu}(F_k)=\sum_k\sum_i\bar{\mu}(E_i\cap F_k)=$$

$$=\sum_i\sum_k\bar{\mu}(E_i\cap F_k)=\sum_i\bar{\mu}(E_i).\quad\blacksquare$$

由于定理 5，即使对于在 $\mathbf{R}$ 中而不在 $\mathbf{P}$ 中之集 E，我們也可以用 $\mu(E)$ 来代替 $\bar{\mu}(E)$，而不致引起混乱。

(1) 在定理 4 的証明里，叙列 $\{E_i\}$ 中左端点与 E 的左端点重合的那一項記作 E_{n_1}；左端点与 E_{n_1} 的右端点重合的那一項記作 E_{n_2}；依此类推。不利用定理 1，2 和 3 也可以証明

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{n_i}\in\mathbf{P}\qquad 和\qquad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{n_i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_{n_i}).$$

(2) 定理 4 不依賴于定理 1，2 和 3 的另一种証法如下：将叙列 $\{E_i\}$ 中各項按照其左端点的值由小到大重新排列，然后应用超限归納法；參看(1)。

(3) 設 g 是单实变数的連續有限增函数，并令

$$\mu_g([a,b))=g(b)-g(a),$$

則在定理 4 和 5 中，将 μ 换为 μ_g，定理仍成立。

(4) 定理 4 和 5 可以推广到 n 維歐几里得空間中，只要将"区間"了解为下列形式的集：

$$E=\{(x_1,\cdots,x_n):\ a_i\leqslant x_i<b_i,\qquad i=1,\cdots,n\},$$

并由下式定义 μ：

$$\mu(E)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i).$$

(5) 設 μ 是定义在一个半环 $\mathbf{P}$ 上的非負广义实值集函数，如果它具有可列可加性，并且 $\mu(0)=0$，則在环 $\mathbf{R}(\mathbf{P})$ 上存在唯一的一个測度 $\bar{\mu}$，使当

$E \in \mathbf{P}$，有 $\bar{\mu}(E)=\mu(E)$。若 μ 是[全]有限或 σ-有限的，則 $\bar{\mu}$ 也一样（参看 5.3 和定理 5 的証明）。

§9. 測度的性質

設 μ 是定义在集类 $\mathbf{E}$ 上的广义实值集函数，如果它能滿足下面的条件：

$$\text{若}\quad E\in\mathbf{E},\quad F\in\mathbf{E}\quad \text{且}\quad E\subset F,$$
$$\text{則}\quad \mu(E)\leqslant\mu(F),$$

則称 μ 是单調的。設 μ 是定义在集类 $\mathbf{E}$ 上的广义实值集函数，如果它能滿足下面的条件：

$$\text{若}\quad E\in\mathbf{E},\quad F\in\mathbf{E},\quad E\subset F,\quad F-E\in\mathbf{E}\quad \text{且}\quad |\mu(E)|<\infty,$$
$$\text{則}\quad \mu(F-E)=\mu(F)-\mu(E),$$

則称 μ 具有**可減性**。

定理 1. 設 μ 是环 $\mathbf{R}$ 上的测度，則 μ 具有单調性和可減性。

証明。如果 $E\in\mathbf{R}, F\in\mathbf{R}$ 且 $E\subset F$，則 $F-E\in\mathbf{R}$，并且

$$\mu(F)=\mu(E)+\mu(F-E)。$$

因为 μ 是非負的，由此推出 μ 是单調的；如果 $\mu(E)$ 是有限的，則可从上式两端各減去 $\mu(E)$，由此即得 μ 的可減性。 ▮

定理 2. 設 μ 是环 $\mathbf{R}$ 上的测度，$E\in\mathbf{R}$，$\{E_i\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中之集的有限或可列类，并且 $E\subset\bigcup_i E_i$，則

$$\mu(E)\leqslant\sum_i\mu(E_i)。$$

証明。我們引用下述簡单然而重要的事实：若 $\{F_i\}$ 是环 $\mathbf{R}$ 中之集的任意叙列，則存在 $\mathbf{R}$ 中不相交集的叙列 $\{G_i\}$ 使得

$$G_i\subset F_i\qquad \text{且}\qquad \bigcup_i G_i=\bigcup_i F_i$$

（令 $G_i=F_i-\bigcup\{F_j:1\leqslant j<i\}$）。对叙列 $\{E\cap E_i\}$ 应用这个事实，再根据 μ 的可列可加性和单調性，就得到定理的結論。 ▮

定理 3. 設 μ 是环 $\mathbf{R}$ 上的测度，$E\in\mathbf{R}$，$\{E_i\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中不相交集

的有限或可列类，并且$\bigcup_i E_i \subset E$，则

$$\sum_i \mu(E_i) \leqslant \mu(E).$$

証明。若$\{E_i\}$是有限类，则$\bigcup_i E_i \in \mathbf{R}$，于是

$$\sum_i \mu(E_i) = \mu(\bigcup_i E_i) \leqslant \mu(E).$$

如果$\{E_i\}$是可列类，则因上式对于$\{E_i\}$的任何有限子类都成立，所以上式对于$\{E_i\}$也成立。 ▌

定理 4. 設μ是环$\mathbf{R}$上的測度，如果$\{E_n\}$是$\mathbf{R}$中之集的增叙列，并且$\lim_n E_n \in \mathbf{R}$，则

$$\mu(\lim_n E_n) = \lim_n \mu(E_n).$$

証明。令$E_0 = 0$，则

$$\mu(\lim_n E_n) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i - E_{i-1})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i - E_{i-1}) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i - E_{i-1}) =$$

$$= \lim_n \mu(\bigcup_{i=1}^{n}(E_i - E_{i-1})) = \lim_n \mu(E_n). \quad ▌$$

定理 5. 設μ是环$\mathbf{R}$上的測度，如果$\{E_n\}$是$\mathbf{R}$中之集的减叙列，这个叙列中至少有一項具有有限測度，并且$\lim_n E_n \in \mathbf{R}$，则

$$\mu(\lim_n E_n) = \lim_n \mu(E_n).$$

証明。設$\mu(E_m) < \infty$，则当$n \geqslant m$时有$\mu(E_n) \leqslant \mu(E_m) < \infty$，因此$\mu(\lim_n E_n) < \infty$。由于$\{E_m - E_n\}$是一个增叙列，根据定理 1 和定理 4，我們有

$$\begin{aligned}
\mu(E_m) - \mu(\lim_n E_n) &= \mu(E_m - \lim_n E_n) = \\
&= \mu(\lim_n (E_m - E_n)) = \\
&= \lim_n \mu(E_m - E_n) = \\
&= \lim_n (\mu(E_m) - \mu(E_n)) = \\
&= \mu(E_m) - \lim_n \mu(E_n).
\end{aligned}$$

因为$\mu(E_m) < \infty$，定理証明完畢。 ▌

設 μ 是定义在集类 $\mathbf{E}$ 上的广义实值集函数，如果对于 $\mathbf{E}$ 中之集的每一个增叙列$\{E_n\}$有 $\lim_n \mu(E_n)=\mu(E)$，其中 $\lim_n E_n=E$，我們就說 μ 在 $E(E\in\mathbf{R})$是**下連續的**。类似地，如果对于 $\mathbf{E}$ 中之集的每一个减叙列$\{E_n\}$有 $\lim_n\mu(E_n)=\mu(E)$，其中假定$\{E_n\}$中至少有一項 E_m 使 $|\mu(E_m)|<\infty$，且 $\lim_n E_n=E$，我們就說 μ 在 E 是**上連續的**。定理 4 和 5 断言：如果 μ 是一个測度，則 μ(在使得 μ 有定义的环中的每一个集)是上連續同时也是下連續的；下面是反面的定理。

定理 6. 設 μ 是定义在环 $\mathbf{R}$ 上的非負有限实值集函数，并具有可加性。如果 μ 在 $\mathbf{R}$ 中每一个集 E 是下連續的，或者在 0 是上連續的，則 μ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个測度。

証明。首先，由于 μ 具有可加性，并且 $\mathbf{R}$ 是一个环，利用数学归納法可証 μ 具有有限可加性。設 $\{E_n\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中不相交集的一个叙列，它的併集 E 也在 $\mathbf{R}$ 中。令

$$F_n=\bigcup_{i=1}^n E_i, \qquad G_n=E-F_n.$$

如果 μ 是下連續的，則因$\{F_n\}$是 $\mathbf{R}$ 中之集的一个增叙列，并且 $\lim_n F_n=E$，我們有

$$\mu(E)=\lim_n\mu(F_n)=\lim_n\sum_{i=1}^n\mu(E_i)=\sum_{i=1}^\infty\mu(E_i).$$

如果 μ 在 0 是上連續的，則因 $\{G_n\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中之集的一个减叙列，并且 $\lim_n G_n=0$，同时由于 μ 是有限的，我們有

$$\mu(E)=\sum_{i=1}^n\mu(E_i)+\mu(G_n)=$$

$$=\lim_n\sum_{i=1}^n\mu(E_i)+\lim_n\mu(G_n)=\sum_{i=1}^\infty\mu(E_i). \quad ▌$$

(1) 定理 1,2,3,4 和 5 对于半环也成立，可以直接加以証明，也可以借助于 8.5 将它們化为对应的关于环的定理而得証。

(2) 設 μ 是环 $\mathbf{R}$ 上的測度，若 E 和 F 是 $\mathbf{R}$ 中任意二集，則

$$\mu(E)+\mu(F)=\mu(E\cup F)+\mu(E\cap F).$$

若E, F和G是R中任意三集，则

$$\mu(E)+\mu(F)+\mu(G)+\mu(E\cap F\cap G)=$$
$$=\mu(E\cup F\cup G)+\mu(E\cap F)+\mu(F\cap G)+\mu(G\cap E).$$

上述結論可以推广到任意有限多个集的場合.

(3) 設μ是环R上的測度,E和F是R中二集，我們用記号$E\sim F$表示$\mu(E\Delta F)=0$这个性質，則关系"$\sim$"具有自反性、对称性和推移性．如果$E\sim F$，則$\mu(E)=\mu(F)=\mu(E\cap F)$．R中具有性質$E\sim 0$之集$E$的全体是否形成一个环?

(4) 沿用(3)中的記号，并令$\rho(E, F)=\mu(E\Delta F)$，則$\rho(E, F)\geqslant 0$, $\rho(E,F)=\rho(F,E)$，且$\rho(E, F)\leqslant\rho(E, G)+\rho(G, F)$．如果$E_1\sim E_2$, $F_1\sim F_2$，則$\rho(E_1,F_1)=\rho(E_2,F_2)$.

(5) 定理4和5可以推广如下．設μ是环R上的測度，如果$\{E_n\}$是R中之集的一个敘列，并且

$$\bigcap_{i=n}^{\infty}E_i\in\mathbf{R},\qquad n=1,2,\cdots,\qquad \liminf_n E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty}E_i\in\mathbf{R},$$

則$\mu(\liminf_n E_n)\leqslant\liminf_n \mu(E_n)$．类似地，如果

$$\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i\in\mathbf{R},\qquad n=1,2,\cdots,\qquad \limsup_n E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i\in\mathbf{R},$$

并且至少存在n的一个值使$\mu(\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i)<\infty$，則

$$\mu(\limsup_n E_n)\geqslant\limsup_n \mu(E_n).$$

(6) 在(5)的后半部里，如果再假定$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<\infty$，則

$$\mu(\limsup_n E_n)=0.$$

(7) 設X是区間$0\leqslant x\leqslant 1$中一切有理数的集，并設P是由形如$\{x: x\in X, a\leqslant x<b\}$的一切"半閉区間"組成的类，其中$0\leqslant a\leqslant b\leqslant 1$, a和b是有理数．在P上定义集函数μ如下:

$$\mu(\{x: a\leqslant x<b\})=b-a,$$

則μ具有有限可加性，并且是上連續和下連續的，但μ不具有可列可加性，因此定理6对于半环不成立.

(8) 設X是一切正整数的集，并設R是由X中一切有限集及其余集組成的类．对于R中的E，若E是有限集，令$\mu(E)=0$，若E是無限集，令

$\mu(E)=\infty$. 則集函数 μ 在 0 是上連續的，但 μ 不具有可列可加性，因此定理 6 的后半部当 μ 可以取得無限値时不成立.

(9) 在定理 5 中，如果将"至少有一項具有有限測度"的条件取消，定理是否仍成立？

(10) 設 X 是一个可分的完全度量空間，μ 是定义在 X 中全体波雷耳集类上的測度，且 $\mu(X)=1$，則存在 X 的子集 E，使 E 为可列个緊集的併集并且 $\mu(E)=1$.（提示：設 $\{x_n\}$ 是在 X 中稠密的点叙列，令 $U_n{}^k$ 为以 x_n 为中心，以 $\frac{1}{k}$ 为半徑的閉球体. 对于 $0<\epsilon<1$ 及 $F_m^k=\bigcup_{n=1}^m U_n^k$，令 m_k 为滿足下列关系的最小正整数：

$$\mu(\bigcap_{i=1}^k F_{m_i}^i)>1-\epsilon.$$

若 $C=\bigcap_{i=1}^{\infty} F_{m_i}^i$，則 C 是緊集，并且 $\mu(C)\geq 1-\epsilon$）.

§10. 外 測 度

設 **E** 是一个非空类，如果它能滿足下面的条件：

$$\text{若 } E\in\mathbf{E}, F\subset E, \text{ 則 } F\in\mathbf{E},$$

則称 **E** 是可傳的.

由 X 中某一子集 E 的一切子集組成的类是可傳类的一个典型例子. 我們需要用到的关于可傳类的代数方面的理論，是一些很簡单的理論，并且与我們已經用过的关于环，σ–环以及其他集类的理論完全类似. 首先，任意多个可傳类的交仍是一个可傳类，因此，对于任一个集类，存在包含这个类的最小可傳类. 我們所特别注意的将是那些本身是 σ–环的可傳类；容易看出，要使得一个可傳类是 σ–环，必須而且只須这个可傳类封閉于可列併的运算. 設 **E** 是任意的集类，我們以 **H**(**E**) 表示由 **E** 产生的可傳 σ–环，即，包含 **E** 的最小可傳 σ–环. 事实上，由 **E** 产生的可傳 σ–环就是能被 **E** 中之集的可列併所遮盖的一切集組成的类；若 **E** 是封閉于可列併运算的非空类（例如 **E** 是一个 σ–环），則 **H**(**E**) 是由 **E** 中之集的一切子集組成的类.

設 μ^* 是定义在集类 $\mathbf{E}$ 上的广义实值集函数，如果它能滿足下面的条件：

若 $E\in\mathbf{E}$, $F\in\mathbf{E}$, 且 $E\cup F\in\mathbf{E}$,

则 $\mu^*(E\cup F)\leqslant\mu^*(E)+\mu^*(F)$,

则称 μ^* 具有**部分可加性**。設 μ^* 是定义在集类 $\mathbf{E}$ 上的广义实值集函数，如果对于 $\mathbf{E}$ 的任何有限子类 $\{E_1,\cdots,E_n\}$，若它的併集也在 $\mathbf{E}$ 中，有

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^n E_i)\leqslant\sum_{i=1}^n\mu^*(E_i),$$

则称 μ^* 具有**有限部分可加性**。設 μ^* 是定义在集类 $\mathbf{E}$ 上的广义实值集函数，如果对于 $\mathbf{E}$ 中之集的任何叙列 $\{E_n\}$，若它的併集也在 $\mathbf{E}$ 中，我們有

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^\infty E_i)\leqslant\sum_{i=1}^\infty\mu^*(E_i),$$

则称 μ^* 具有**可列部分可加性**。

設 μ^* 是定义在可傳 σ-环 $\mathbf{H}$ 上的非負广义实值单調集函数，如果它具有可列部分可加性，并且 $\mu^*(0)=0$，则称 μ^* 为**外测度**。容易看出，外测度必定具有有限部分可加性。关于测度的[全]有限或 σ-有限这些术語，可以同样用之于外测度。

当我們試圖将测度的概念从环扩張到較广泛的集类上时，很自然地就产生了外测度的概念。下面的定理包含着关于这方面的某些細节的精确陈述。

定理 1. 設 μ 是环 $\mathbf{R}$ 上的测度，如果对于 $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 中每一个集 E，定义

$$\mu^*(E)=\inf\left\{\sum_{n=1}^\infty\mu(E_n):\ E_n\in\mathbf{R},\quad n=1,2,\cdots;\quad E\subset\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right\},$$

则 μ^* 是 μ 扩張到 $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 上的一个外测度；如果 μ 是[全] σ-有限的，则 μ^* 也一样。

外測度 μ^* 称为由測度 μ 引出的外測度. $\mu^*(E)$在口头上可以描述为形如$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$的和数的下确界，其中$\{E_n\}$是 R 中之集的叙列，它的併集包含 E.

証明. 若 $E\in\mathbf{R}$, 則$E\subset E\cup 0\cup 0\cup\cdots$, 因此$\mu^*(E)\leqslant\mu(E)+\mu(0)+\mu(0)+\cdots=\mu(E)$. 另一方面,若$E\in\mathbf{R}, E_n\in\mathbf{R}, n=1,2,\cdots$,且 $E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, 則由 §9 定理 2, $\mu(E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$, 因此 $\mu(E)\leqslant\mu^*(E)$. 这就証明了 μ^* 是 μ 的扩張,即当 $E\in\mathbf{R}$ 时 $\mu^*(E)=\mu(E)$; 由此并有 $\mu^*(0)=0$.

若 $E\in\mathbf{H}(\mathbf{R})$, $F\in\mathbf{H}(\mathbf{R})$, $E\subset F$, 則 R 中之集的任何叙列如果遮盖 F, 一定也遮盖 E, 因此 $\mu^*(E)\leqslant\mu^*(F)$.

为了証明 μ^* 具有可列部分可加性, 設 E 和 E_i 是 $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 中的集, 并且$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$; 令 ε 为任意正数, 并对于每一个 $i=1,2,\cdots$,选取 R 中之集的一个叙列$\{E_{ij}\}$使

$$E_i\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}E_{ij}\qquad 且\qquad \sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_{ij})\leqslant\mu^*(E_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}.$$

(根据 $\mu^*(E_i)$的定义, 这样的叙列是存在的.) 因为 E_{ij} 的全体是 R 中之集的一个可列类, 并且这个类遮盖 E, 所以

$$\mu^*(E)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_{ij})\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)+\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的, 我們有

$$\mu^*(E)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i).$$

最后, 設 μ 是 σ–有限的, 并設 E 是 $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 中的任意集. 根据 $\mathbf{H}(\mathbf{R})$的定义, 存在 R 中之集的叙列$\{E_i\}$, 使得 $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$. 因为 μ 是 σ–有限的, 所以对于每一个 $i=1,2,\cdots$, 存在 R 中之集的叙列 $\{E_{ij}\}$, 使得

$$E_i\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}E_{ij}\qquad \text{且}\qquad \mu(E_{ij})<\infty.$$

因此

$$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}E_{ij}\qquad \text{且}\qquad \mu^*(E_{ij})=\mu(E_{ij})<\infty.\quad \blacksquare$$

(1) 在定理1的假設条件下，若 μ 是有限的，μ^* 是否一定也是有限的？

(2) 对于任意集类 E，我們以 J(E) 表示包含 E 的最小可傳环．設 μ 是定义在环 R 上的非負有限实値集函数，并具有有限可加性．如果对于 J(R) 中每一个集 E，定义

$$\mu^*(E)=\inf\{\mu(F):E\subset F\in\mathbf{R}\},$$

則 μ^* 是定义在 J(R) 上的非負有限实値集函数，并具有有限部分可加性．对于 $E\in\mathbf{R}$，是否有 $\mu^*(E)=\mu(E)$？

(3) 設 H 是 X 的一些子集組成的类．要使得 H 形成由 X 的一切子集組成的布尔环中的理想子环，必須而且只須 H 是一个可傳环；参看 4.4.

(4) 下面是定义在可傳 σ-环上的集函数的几个例子；其中有的是外測度，有的則恰好違反了定义外測度的条件之一．

(4a) X 是任意的一个集，H 是由 X 的一切子集組成的类．对于 X 中任意一个固定的点 x_0，令 $\mu^*(E)=\chi_E(x_0)$．

(4b) X 和 H 同(4a)；对于 H 中每一个 E，$\mu^*(E)=1$．

(4c) $X=\{x,y\}$ 是包含恰好两个不同点 x 和 y 的集，H 是由 X 的一切子集組成的类，μ^* 由下式确定：

$$\mu^*(0)=0,\qquad \mu^*(\{x\})=\mu^*(\{y\})=10,\qquad \mu^*(X)=1.$$

(4d) X 是由 100 个点組成的集，这 100 个点排成每列 10 个点共計 10 列的方陣；H 是由 X 的一切子集組成的类；$\mu^*(E)$ 是含有 E 中至少一个点的列的数目．

(4e) X 是全体正整数集，H 是由 X 的一切子集組成的类．对于 X 的每一个有限子集 E，以 $\nu(E)$ 表 E 中之点的数目；

$$\mu^*(E)=\limsup_n \frac{1}{n}\nu(E\cap\{1,\cdots,n\}).$$

不合

(4f) X 是任意的一个集，H 是由 X 的一切有限或可列子集組成的类，$\mu^*(E)$ 是 E 中之点的个数（$=\infty$，若 E 为無限集）．

(5) 設 μ^* 是定义在可傳 σ-环 H 上的外測度，E_0 是 H 中任意一个固

定的集，则由等式 $\mu_0^*(E)=\mu^*(E\cap E_0)$ 确定的集函数 μ_0^* 是 H 上的一个外测度.

(6) 設 λ^* 和 μ^* 是定义在可傳 σ-环 H 上的两个外测度，则由等式 $\nu^*(E)=\lambda^*(E)\cup\mu^*(E)$ 确定的集函数 ν^* 是 H 上的一个外测度.

(7) 設 $\{\mu_n^*\}$ 是定义在可傳 σ-环 H 上的外测度叙列，$\{a_n\}$ 是一个正数列，则由等式

$$\mu^*(E)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mu_n^*(E)$$

确定的集函数 μ^* 是 H 上的一个外测度.

§11. 可 測 集

設 μ^* 是定义在可傳 σ-环上的外测度。H 中的集 E 称为 μ^*-可測的，如果对于 H 中每一个集 A，有

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E').$$

μ^*-可測性是外測度理論中極为重要的一个概念。以下我們就要闡明 μ^*-可測性的含义；在沒有熟知它的含义前，要对 μ^*-可測性有一个直观的理解是相当困难的。首先我們指出：外測度不一定是具有可列可加性，甚至有限可加性的集函数（參看 10.4d)。为了試圖滿足可加性的要求，我們选出那些集，它們能够可加地分割任何其他的集——μ^*-可測集的定义就是这种很模糊的說法的精确表达。这个初看起来相当复杂的概念的引进，在 §13 中証明有关測度的扩張的重要定理时，被証实是十分有成效的。

定理 1. 設 μ^* 是可傳 σ-环 H 上的外測度，則由全体 μ^*-可測集組成的类 $\overline{\mathbf{S}}$ 是一个环。

証明。若 E 和 F 是 $\overline{\mathbf{S}}$ 中的集，并且 $A\in$ H，則

(a) $$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E'),$$

(b) $$\mu^*(A\cap E)=\mu^*(A\cap E\cap F)+\mu^*(A\cap E\cap F'),$$

(c) $$\mu^*(A\cap E')=\mu^*(A\cap E'\cap F)+\mu^*(A\cap E'\cap F').$$

将(b),(c)代入(a),得到

$$\text{(d)}\qquad \mu^*(A)=\mu^*(A\cap E\cap F)+\mu^*(A\cap E\cap F')+ +\mu^*(A\cap E'\cap F)+\mu^*(A\cap E'\cap F').$$

在等式(d)中,将 A 换为 $A\cap(E\cup F)$, 則右端的前三項保持不变,而第四項为零;因此

$$\text{(e)}\qquad \mu^*(A\cap(E\cup F))=\mu^*(A\cap E\cap F)+ +\mu^*(A\cap E\cap F')+\mu^*(A\cap E'\cap F).$$

又因 $E'\cap F'=(E\cup F)'$,将(e)代入(d),就有

$$\text{(f)}\qquad \mu^*(A)=\mu^*(A\cap(E\cup F))+\mu^*(A\cap(E\cup F)'),$$

这就証明了 $E\cup F\in\bar{\mathbf{S}}$.

类似地,如果在等式(d)中将 A 换为

$$A\cap(E-F)'=A\cap(E'\cup F),\text{則得}$$

$$\text{(g)}\qquad \mu^*(A\cap(E-F)')=\mu^*(A\cap E\cap F)+ +\mu^*(A\cap E'\cap F)+\mu^*(A\cap E'\cap F').$$

由于 $E\cap F'=E-F$,将(g)代入(d),我們得到

$$\text{(h)}\qquad \mu^*(A)=\mu^*(A\cap(E-F))+\mu^*(A\cap(E-F)'),$$

这就証明了 $E-F\in\bar{\mathbf{S}}$. 此外,$E=0$ 显然滿足等式(a), 由此可見 $\bar{\mathbf{S}}$ 是一个环。▌

在进入 μ^*-可测性的較深性質的研究前, 我們先指出下述簡单然而有用的事实。

設 μ^* 是可傳 σ-环 $\mathbf{H}$ 上的外测度, E 是 $\mathbf{H}$ 中的集。如果对于 $\mathbf{H}$ 中每一个集 A,有

$$\mu^*(A)\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E'),$$

則 E 是 μ^*-可測集。

这个事实的証明非常簡单: 因为 μ^* 具有部分可加性,由此立即得到反方向的不等式 $\mu^*(A)\leqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E')$.

定理 2. 設 μ^* 是可傳 σ-环 $\mathbf{H}$ 上的外测度, 則由全体 μ^*-可測集組成的类 $\bar{\mathbf{S}}$ 是一个 σ-环。如果 $A\in\mathbf{H}$, $\{E_n\}$ 是 $\bar{\mathbf{S}}$ 中不相交集

的叙列，并且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$，則

$$\mu^*(A \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n).$$

証明. 在等式(e)中，将 E 和 F 分别換为 E_1 和 E_2，我們有：

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2).$$

应用数学归納法可証，对于任何正整数 n，下式成立：

$$\mu^*(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i).$$

令

$$F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \qquad i = 1, 2, \cdots,$$

則由定理 1，

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n') \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E').$$

由于上式对于每一个 n 都成立，我們得到：

$$\text{(i)} \qquad \mu^*(A) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E') \geqslant$$

$$\geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E').$$

因此 $E \in \overline{\mathbf{S}}$（这也就説明了 $\overline{\mathbf{S}}$ 封閉于不相交可列併的运算），从而

$$\text{(j)} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E') = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E').$$

在(j)中将 A 換为 $A \cap E$，就証明了定理的第二部分.（不能从等式(j)的两端各减去 $\mu^*(A \cap E')$，因为它不一定是有限数.）因为环中之集的任何可列并可以表为該环中集的不相交可列併，所以 $\overline{\mathbf{S}}$ 是一个 σ-环. ▌

定理 3. 設 μ^* 是可傳 σ-环 $\mathbf{H}$ 上的外測度，$\overline{\mathbf{S}}$ 是由全体 μ^*-

可测集組成的类，則外测度为零的集都在 $\overline{\mathbf{S}}$ 中．如果对于 $\overline{\mathbf{S}}$ 中的集 E，定义 $\bar{\mu}(E)=\mu^*(E)$，則 $\bar{\mu}$ 是 $\overline{\mathbf{S}}$ 上的一个完全测度．

測度 $\bar{\mu}$ 称为由外測度 μ^* 引出的測度．

証明．若 $E\in\mathbf{H}$，并且 $\mu^*(E)=0$，則对于 $\mathbf{H}$ 中每一个集 A，我們有：

$$\mu^*(A)=\mu^*(E)+\mu^*(A)\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E'),$$

因此 $E\in\overline{\mathbf{S}}$．在等式(j)中将 A 换为 E，就得到 $\bar{\mu}$ 在 $\overline{\mathbf{S}}$ 上的可列可加性．如果

$$E\in\overline{\mathbf{S}},\qquad F\subset E,\qquad \text{且}\qquad \bar{\mu}(E)=\mu^*(E)=0,$$

則 $\mu^*(F)=0$，因此 $F\in\overline{\mathbf{S}}$，这就証明了 $\bar{\mu}$ 是一个完全测度． ▌

(1) 在 10.4d 中，集 E 是 μ^*-可測集的必要和充分条件是：对于 E 中每一个点 x，x 所在的那一列点全部都在 E 中．在 10.4f 中，哪些集是 μ^*-可測集？

(2) 設 μ^* 是可傳 σ-环 $\mathbf{H}$ 上的外測度．在甚么附加条件之下，μ^*-可測集的全体形成一个代数？

(3) 在定理 1 的証明里，将等式(d)中的 A 换为 $A\cap(E'\cup F')$，可以直接証明 $\overline{\mathbf{S}}$ 对于交的运算是封閉的．如果将 A 换为 $A\cap(F-E)'=A\cap(E\cup F')$，可以得出甚么結論？

(4) 設 μ^* 是定义在可傳环 $\mathbf{J}$ 上的非負有限实值单调集函数，并具有有限部分可加性；參看 10.2．μ^*-可測集的全体形成一个环，并且集函数 μ^* 在这个环上具有可加性．

(5) 設 μ^* 是可傳 σ-环 $\mathbf{H}$ 上的外測度，$\overline{\mathbf{S}}$ 是由全体 μ^*-可測集組成的类．如果 $A\in\mathbf{H}$，$\{E_n\}$ 是 $\overline{\mathbf{S}}$ 中之集的增叙列，則

$$\mu^*(\lim_n(A\cap E_n))=\lim_n\mu^*(A\cap E_n).$$

类似地，如果 $A\in\mathbf{H}$，$\{E_n\}$ 是 $\overline{\mathbf{S}}$ 中之集的减叙列，并且至少存在 m 的一个值使 $\mu^*(A\cap E_m)<\infty$，則 $\mu^*(\lim_n(A\cap E_n))=\lim_n\mu^*(A\cap E_n)$.

(6) 設 μ^* 是可傳 σ-环 $\mathbf{H}$ 上的外測度，E 和 F 是 $\mathbf{H}$ 中的两个集，其中至少有一个是 μ^*-可測集，則(參看 9.2)

$$\mu^*(E)+\mu^*(F)=\mu^*(E\cup F)+\mu^*(E\cap F).$$

(7) 本节中的結論也可以利用分割（参看 7.5）得出．設 $\{E_i\}$ 是有限个或可列个不相交集的叙列，并且 $\bigcup_i E_i=X$，則称 $\{E_i\}$ 是一个**分割**．設 μ^* 是可傳 σ–环 $\mathbf{H}$ 上的外測度，$\{E_i\}$ 是一个分割，如果对于 $\mathbf{H}$ 中每一个集 A 都有

$$\mu^*(A)=\sum_i \mu^*(A\cap E_i),$$

則称 $\{E_i\}$ 是一个 **μ^*–分割**；如果分割 $\{E, E'\}$ 是一个 μ^*–分割，則称 E 是一个 **μ^*–集**．設 $\{E_i\}$ 和 $\{F_j\}$ 是两个分割，如果每一个 E_i 被 F_j 之一所包，則称 $\{E_i\}$ 是 $\{F_j\}$ 的一个**子分割**；并称由一切形如 $E_i\cap F_j$ 的集組成的分割为 $\{E_i\}$ 和 $\{F_j\}$ 的**乘积**．我們注意到，要使得 $\mathbf{H}$ 中的集是 μ^*–集，必須而且只須它是在本节意义下的 μ^*–可測集．

(7a) 两个 μ^*–分割的乘积还是一个 μ^*–分割．

(7b) 若 μ^*–分割 $\{E_i\}$ 有一个子分割是 μ^*–分割，則 $\{E_i\}$ 是一个 μ^*–分割．

(7c) 分割 $\{E_i\}$ 是 μ^*–分割的必要和充分条件是：每一个 E_i 是 μ^*–集．

(7d) 由全体 μ^*–集組成的类是一个 σ–环．（提示：由全体 μ^*–集組成的类是一个封閉于不相交可列併运算的环．）

(8a) 設 $\mathbf{H}$ 是由度量空間 X 的一切子集組成的类，μ^* 是定义在 $\mathbf{H}$ 上的外測度，如果当 $\rho(E,F)>0$ 时有

$$\mu^*(E\cup F)=\mu^*(E)+\mu^*(F),$$

其中 ρ 是 X 上的度量，則称 μ^* 是一个**度量外測度**．設 μ^* 是一个度量外測度，如果 E 是 X 中一个开集 U 的子集，并且

$$E_n=E\cap\left\{x:\ \rho(x,U')\geqslant\frac{1}{n}\right\},\qquad n=1,2,\cdots,$$

則 $\lim_n\mu^*(E_n)=\mu^*(E)$．（提示：$\{E_n\}$ 是以 E 为其併集的一个增叙列．令 $E_0=0$，$D_n=E_{n+1}-E_n$，如果 D_{n+1} 和 E_n 都是非空的，則 $\rho(D_{n+1},E_n)>0$，于是有

$$\mu^*(E_{2n+1})\geqslant\sum_{i=1}^{n}\mu^*(D_{2i})\qquad 和\qquad \mu^*(D_{2n})\geqslant\sum_{i=1}^{n}\mu^*(D_{2i-1}).$$

当級数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(D_{2i}) \quad 和 \quad \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(D_{2i-1})$$

中的任何一个發散时，結論显然成立；如果两个級数都收斂，則結論可由下面的关系式得出：

$$\mu^*(E)\leqq\mu^*(E_{2n})+\sum_{i=n}^{\infty}\mu^*(D_{2i})+\sum_{i=n+1}^{\infty}\mu^*(D_{2i-1}).)$$

(8b) 設 μ^* 是度量外测度，則每一个开集(因此，每一个波雷耳集)是 μ^*-可测集.(提示：設 U 是开集，A 是 X 的任意子集，对 $E=A\cap U$ 应用 (8a). 因为 $\rho(E_n, A\cap U')>0$，于是有

$$\mu^*(A)\geqq\mu^*(E_n\cup(A\cap U'))=\mu^*(E_n)+\mu^*(A\cap U').)$$

(8c) 設 μ^* 是定义在度量空間 X 的全体子集类上的外测度，并且使得每一个开集是 μ^*-可测集，則 μ^* 是一个度量外测度. (提示：若 $\rho(E,F)>0$，令 U 是滿足关系式 $E\subset U$ 和 $F\cap U=0$ 的一个开集，然后以 $A=E\cup F$ 来試驗 U 的 μ^*-可测性.)

第 三 章

测度的扩張

§12. 引出的测度的性質

我們已經知道，由一个测度可以引出一个外测度，由一个外测度也可以引出一个测度。如果我們由一个测度 μ 出發，先建立由它引出的外测度 μ^*，再建立由 μ^* 引出的测度 $\bar{\mu}$，我們要問：μ 和 $\bar{\mu}$ 之間存在甚么关系？本节的目的就在回答这一个問題。在本节內，我們假定：

μ 是环 $\mathbf{R}$ 上的测度，μ^* 是 $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 上由 μ 引出的外测度，$\bar{\mu}$ 是 $\bar{\mathbf{S}}$ 上由 μ^* 引出的测度，其中 $\bar{\mathbf{S}}$ 是由全体 μ^*-可测集組成的 σ-环。

定理 1. $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 中每一个集是 μ^*-可测集。

証明。設 $E\in\mathbf{R}$, $A\in\mathbf{H}(\mathbf{R})$, $\varepsilon>0$, 則由 μ^* 的定义，存在 $\mathbf{R}$ 中之集的叙列 $\{E_n\}$，使得 $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 并且

$$\mu^*(A)+\varepsilon\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(\mu(E_n\cap E)+\mu(E_n\cap E'))\geqslant$$
$$\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E').$$

由于上式对于任意的 ε 成立，因此 E 是 μ^*-可测的。換一句話說，我們已經証明了 $\mathbf{R}\subset\bar{\mathbf{S}}$；又因 $\bar{\mathbf{S}}$ 是一个 σ-环，所以 $\mathbf{S}(\mathbf{R})\subset\bar{\mathbf{S}}$。 ∎

定理 2. 設 $E\in\mathbf{H}(\mathbf{R})$，則

$$\mu^*(E)=\inf\{\bar{\mu}(F):E\subset F\in\bar{\mathbf{S}}\}=$$
$$=\inf\{\bar{\mu}(F):E\subset F\in\mathbf{S}(\mathbf{R})\}.$$

这个定理也可以叙述如下：由 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 上的 $\bar{\mu}$ 引出的外测度以及

由 $\overline{\mathbf{S}}$ 上的 $\bar{\mu}$ 引出的外測度都与 μ^* 重合。

証明。因为对于 **R** 中的 F, 有 $\mu(F)=\bar{\mu}(F)$（根据 $\bar{\mu}$ 的定义和 §10 定理 1），因此

$$\mu^*(E)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n): E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,\quad E_n\in\mathbf{R},\quad n=1,2,\cdots\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\mu}(E_n): E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,\quad E_n\in\mathbf{S}(\mathbf{R}),\quad n=1,2,\cdots\right\}.$$

因为 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 中集的任何叙列 $\{E_n\}$ 如果满足关系式

$$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=F,$$

則可以換为具有同样性質的一个不相交叙列，而不致增加叙列各項的測度之和；又由 $\bar{\mu}$ 的定义，对于 $\overline{\mathbf{S}}$ 中的 F, 有 $\bar{\mu}(F)=\mu^*(F)$，因此

$$\mu^*(F)\geqslant\inf\{\bar{\mu}(F): E\subset F\in\mathbf{S}(\mathbf{R})\}\geqslant$$
$$\geqslant\inf\{\bar{\mu}(F): E\subset F\in\overline{\mathbf{S}}\}\geqslant\mu^*(E).$$

設 $E\in\mathbf{H}(\mathbf{R})$, $F\in\mathbf{S}(\mathbf{R})$, $E\subset F$, 如果对于 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 中满足关系式 $G\subset F-E$ 的每一个集 G, 有 $\bar{\mu}(G)=0$, 則称 F 是 E 的一个**可測复盖**。不严格地說，$\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 中之集 E 的可測复盖是 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 中遮盖 E 的最小集。

定理 3. 設 E 是 $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 中具有 σ-有限外测度的集，則存在 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 中的集 F, 使 $\mu^*(E)=\bar{\mu}(F)$，并使 F 为 E 的一个可测复盖。

証明。首先假定 $\mu^*(E)<\infty$。

由定理 2，对于每一个 $n=1,2,\cdots$, 存在 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 中的一个集 F_n, 使得

$$E\subset F_n\qquad 且\qquad \bar{\mu}(F_n)\leqslant\mu^*(E)+\frac{1}{n}.$$

令 $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$, 則

$$E\subset F\in\mathbf{S}(\mathbf{R})\qquad 且\qquad \mu^*(E)\leqslant\bar{\mu}(F)\leqslant\bar{\mu}(F_n)\leqq\mu^*(E)+\frac{1}{n}.$$

由于 n 是任意的，因此 $\mu^*(E)=\bar{\mu}(F)$。如果 $G\in\mathbf{S}(\mathbf{R})$，并且 $G\subset F-E$，于是 $E\subset F-G$，我們有

$$\bar{\mu}(F)=\mu^*(E)\leqslant\bar{\mu}(F-G)=\bar{\mu}(F)-\bar{\mu}(G)\leqslant\bar{\mu}(F);$$

因为 $\bar{\mu}(F)<\infty$，所以 $\bar{\mu}(G)=0$，这就說明了 F 是 E 的一个可測复盖。

若 $\mu^*(E)=\infty$，則因 E 是具有 σ- 有限外測度的集，它可以表为可列个具有有限外測度不相交集的併集：

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,\qquad \mu^*(E_n)<\infty.$$

設 F_n 是 E_n 的可測复盖，并令 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，則显然有 $F\in\mathbf{S}(\mathbf{R})$和 $E\subset F$。如果 $G\subset F-E$，則 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$，其中 $G_n=G\cap F_n$。由于 $G_n\subset F_n-E_n$，因此 $\bar{\mu}(G_n)=0$，所以 $\bar{\mu}(G)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\mu}(G_n)=0$。由此可知，$F$ 是 E 的一个可測复盖。等式 $\mu^*(E)=\bar{\mu}(F)$ 在 $\mu^*(E)=\infty$ 的場合下显然成立，因为此时 $\bar{\mu}(F)=\infty$。 ▌

定理 4. 設 $E\in\mathbf{H}(\mathbf{R})$，$F$ 是 E 的可測复盖，則 $\mu^*(E)=\bar{\mu}(F)$；如果 F_1 和 F_2 都是 E 的可測复盖，則 $\bar{\mu}(F_1\Delta F_2)=0$。

証明. 由关系式 $E\subset F_1\cap F_2\subset F_1$ 可以推出 $F_1-(F_1\cap F_2)\subset F_1-E$，由于 F_1 是 E 的可測复盖，因此有

$$\bar{\mu}(F_1-(F_1\cap F_2))=0.$$

类似地，有

$$\bar{\mu}(F_2-(F_1\cap F_2))=0.$$

因此

$$\bar{\mu}(F_1\Delta F_2)=0.$$

若 $\mu^*(E)=\infty$，等式 $\mu^*(E)=\bar{\mu}(F)$ 显然成立；若 $\mu^*(E)<\infty$，則由定理 3，存在 E 的可測复盖 F_0 使

$$\bar{\mu}(F_0)=\mu^*(E).$$

根据前面所述可知，任意两个可測复盖具有相同的測度，因此定理

証明完畢。 ▌

定理 5. 設 μ 在 $\mathbf{R}$ 上是 σ- 有限的，則 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 上的測度 $\bar{\mu}$ 和 $\bar{\mathbf{S}}$ 上的測度 $\bar{\mu}$ 都是 σ- 有限的。

証明。根据 §10 定理 1，如果 μ 是 σ- 有限的，則 μ^* 也是 σ-有限的。因此，对于 $\bar{\mathbf{S}}$ 中每一个集 E，存在 $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 中之集的一个叙列 $\{E_i\}$ 使得

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \qquad \mu^*(E_i) < \infty, \qquad i=1,2,\cdots.$$

对于每一个 E_i 应用定理 3，就得到定理的結論。 ▌

在本节开头所提出来的問題也可以从另外一个方向提出。如果我們由一个外測度 μ^* 出發，先建立由它引出的測度 $\bar{\mu}$，再建立由 $\bar{\mu}$ 引出的外測度 $\bar{\mu}^*$，則 μ^* 和 $\bar{\mu}^*$ 之間存在甚么关系？一般說来，这两个集函数是不相同的；但当引出的外測度 $\bar{\mu}^*$ 与原来的外測度 μ^* 重合时，我們称 μ^* 是**正則的**。定理 2 說明了由环上的測度引出的外測度总是正則的。反面的命題也成立：如果 μ^* 是正則外測度，則 $\mu^*=\bar{\mu}^*$ 是由环上的一个測度引出的外測度，即由 μ^*-可測集类上的測度 $\bar{\mu}$ 引出的外測度。由此可見，引出的外測度与正則外測度这两个概念是同等寬广的。

(1) 定理 4 断言：可測复蓋若存在，則如将測度为零的差集略去不計，可測复蓋是唯一确定的；定理 3 断言：具有 σ-有限外測度的集必有可測复蓋。下面的例子說明，在定理 3 中，σ-有限性的假設条件是不可少的。

設 X 是歐氏平面。$\mathbf{R}_0$ 是由一切这样的集 E 組成的类：E 能被可列条水平直綫所遮蓋，而在每一条水平直綫 L 上，或者 E 是可列的，或者 $L-E$ 是可列的。設 $\mathbf{R}$ 是由 $\mathbf{R}_0$ 产生的代数（参看 4.5）。如果对于 $\mathbf{R}$ 中每一个 E，按照 E 为可列或不可列，定义 $\mu(E)=0$ 或 ∞，則 μ 是 $\mathbf{R}$ 上的測度。容易驗証，在这个場合下 $\mathbf{R}=\mathbf{S}(\mathbf{R})$，并且 $\bar{\mathbf{S}}=\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 是 X 的一切子集所成的类。如果 E 是 y-軸并且 $E \subset F \in \mathbf{S}(\mathbf{R})$，則存在 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 中的集 G 使得 $G \subset F-E$ 和 $\mu(G) \neq 0$。

(2) 設 E 是实数軸 X 的一个子集，如果在每一个有限区間之外有 E 的不可列無限多个点，則称 E 具有**無限凝聚点**。設 X 是实数軸，E 是 X 的子集。定义集函数 μ^* 如下：若 E 为有限或可列，則 $\mu^*(E)=0$；若 E 为不可

列但沒有無限凝聚点，則 $\mu^*(E)=1$；若 E 具有無限凝聚点，則 $\mu^*(E)=\infty$. μ^* 是一个全 σ-有限外測度；但因只有可列集及其余集是 μ^*-可測集，因此引出的測度 $\overline{\mu}$ 并非 σ-有限的. μ^* 是否正則的？ 如果对于具有無限凝聚点的集 E，定义 $\mu^*(E)=17$，我們可以得到怎样的結論？

(3) 設 n 是一个固定的正整数；$\aleph_0, \aleph_1, \cdots, \aleph_n$ 是無限集的最初 $n+1$ 个势，按照由小到大的順序排列. 設 X 是势为 $\aleph_n$ 之集，E 是 X 的子集，定义集函数 μ^* 如下：若 E 为有限集，則 $\mu^*(E)=0$；若 E 具有势 $\aleph_k$, $0\leqslant k\leqslant n$，則 $\mu^*(E)=k$. μ^* 是一个外測度. μ^* 是否正則的？

(4) 設 μ^* 是可傳 σ-环 $\mathbf{H}$ 上的正則外測度，如果 $\{E_n\}$ 是 $\mathbf{H}$ 中之集的一个增叙列并且 $\lim_n E_n=E$，則 $\mu^*(E)=\lim_n \mu^*(E_n)$. （提示：若 $\lim_n \mu^*(E_n)=\infty$，結論显然成立. 若 $\lim_n \mu^*(E_n)<\infty$，令 F_n 为 E_n 的 μ^*-可測复盖，$n=1,2,\cdots$，于是 $\{F_n\}$ 是一个增叙列，設 $\lim_n F_n=F$. 因为 $\mu^*(F_n)=\mu^*(E_n)\leqslant\mu^*(E)$，我們有 $\lim_n \mu^*(F_n)=\mu^*(F)\leqslant\mu^*(E)$；另一方面，由于 $E\subset F$，所以有 $\mu^*(E)\leqslant\mu^*(F)$. 因此 F 是 E 的可測复盖.）上述結論对于非正則外測度不成立；可以根据(2)建立一个反例.

(5) 設 X 是任意集，E 是 X 的子集. 按照 E 为空集或非空集定义 $\mu(E)=0$ 或 1；則集函数 μ^* 是 X 的一切子集所成的类上的正則外測度. 如果 $\{E_n\}$ 是各項为非空集的減叙列，但其交集为空集（当 X 为無限集时这样的叙列是存在的），則

$$\lim_n \mu^*(E_n)=1, \qquad \mu^*(\lim_n E_n)=0;$$

换一句話說，与(4)类似的关于減叙列的命題，即使对于全有限正則外測度也是不成立的.

(6) 設 μ_1^* 和 μ_2^* 是 X 的一切子集所成的类上的两个有限外測度；并設 $\overline{\mathbf{S}}_i$ 是 μ_i^*-可測集的全体所成的类，$i=1,2$. 如果对于 X 的一切子集 E，定义

$$\mu^*(E)=\mu_1^*(E)+\mu_2^*(E),$$

則 μ^*-可測集的全体所成的类 $\overline{\mathbf{S}}$ 是 $\overline{\mathbf{S}}_1$ 与 $\overline{\mathbf{S}}_2$ 之交.（提示：如果 $\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E')=\mu^*(A)$，則 $\mu_i^*(A\cap E)+\mu_i^*(A\cap E')=\mu_i^*(A)$, $i=1,2$.）如果 μ_1^* 和 μ_2^* 不一定是有限的，我們可以得到怎样的結論？

(7) 設 μ_1^* 是 X 的一切子集所成的类上的一个有限正則外測度，并按照

E为空集或非空集，定义$\mu_2^*(E)=0$或1，则μ_2^*也是一个有限正则外测度；但若μ_1^*取两个以上的不同值时，$\mu_1^*+\mu_2^*$不是正则的.

(8) 設X是一个度量空間，p是一个正的实数，E是X的一个子集，则由下式定义的数称为E的p-維豪司道夫(外)測度：

$$\mu_p^*(E)=\sup_{\varepsilon>0}\ \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\delta(E_i))^p : E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,\ \ \delta(E_i)<\varepsilon,\ \ i=1,2,\cdots\right\},$$

其中$\delta(E)$表示E的直徑.

(8a) 集函数μ_p^*是一个度量外测度；参看11.8a.

(8b) 外測度μ_p^*是正則的；事实上，对于X的每一个子集E，存在开集的減叙列$\{U_n\}$，使得

$$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n,\qquad \mu_p^*(E)=\mu_p^*(\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n).$$

§13. 測度的扩張和增补

环上的測度是不是一定可以扩張到由这个环产生的σ-环上？这个問題实質上已經在前面几节里有了解答；現在我們将它正式地由下面的定理加以总結.

定理 1. 設μ是环$\mathbf{R}$上的σ-有限測度，則在σ-环$\mathbf{S}(\mathbf{R})$上存在唯一的一个測度$\bar{\mu}$使当$E\in\mathbf{R}$，有$\bar{\mu}(E)=\mu(E)$；測度$\bar{\mu}$是σ-有限的.

測度$\bar{\mu}$称为μ的扩張. 以后在不致引起混淆的場合下，对于$\mathbf{S}(\mathbf{R})$中的集E，我們也将以$\mu(E)$来代替$\bar{\mu}(E)$.

証明. $\bar{\mu}$的存在已在§11 定理3和§12 定理1中証明(即使沒有σ-有限性的限制，$\bar{\mu}$也是存在的). 为了証明唯一性，假定μ_1和μ_2是$\mathbf{S}(\mathbf{R})$上的两个測度使当$E\in\mathbf{R}$，有$\mu_1(E)=\mu_2(E)$. 設$\mathbf{M}$是$\mathbf{S}(\mathbf{R})$中具有性質$\mu_1(E)=\mu_2(E)$的一切集E所成的类. 如果两个測度中有一个是有限的，并若$\{E_n\}$是$\mathbf{M}$中之集的一个单調叙

列，則因

$$\mu_i(\lim_n E_n)=\lim_n \mu_i(E_n), \qquad i=1,2,$$

我們有 $\lim_n E_n \in \mathbf{M}$。（这里需要用到下述条件：对于每一个 n，$\mu_1(E_n)$ 和 $\mu_2(E_n)$ 二数之一必須是有限的，从而另一数也必須是有限的；参看 §9 定理4和 5。）这就是說，$\mathbf{M}$ 是一个单調类。由于 $\mathbf{M} \supset \mathbf{R}$，根据 §6 定理 2，$\mathbf{M} \supset \mathbf{S}(\mathbf{R})$。

在一般的場合下，就是当 μ_1 和 μ_2 不一定是有限时，我們可以証明如下。設 A 是 $\mathbf{R}$ 中任意一个固定的集，$\mu_1(A)$ 和 $\mu_2(A)$ 之一是有限的。因为 $\mathbf{R} \cap A$ 是一个环，而 $\mathbf{S}(\mathbf{R}) \cap A$ 是由这个环产生的 σ–环（参看 §5 定理 5），将上段所述的結論应用到 $\mathbf{R} \cap A$ 和 $\mathbf{S}(\mathbf{R}) \cap A$ 上，就可以証明若 $E \in \mathbf{S}(\mathbf{R}) \cap A$，則 $\mu_1(E)=\mu_2(E)$。由于 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 中任一个集 E 能被 $\mathbf{R}$ 中具有有限測度（对于 μ_1 或 μ_2）之集的一个不相交可列併所遮盖，于是定理証明完畢。 ▌

在 §12 定理的証明里，从我們所采用的使測度扩張的过程中，可以得出比定理 1 所述稍多的結論：环 $\mathbf{R}$ 上的測度 μ 事实上可以扩張到一个类上（由一切 μ^*–可測集組成的类），这个类一般說来要比由 $\mathbf{R}$ 产生的 σ–环为大。下面的定理說明，为了获得 μ 的定义域的这种微小的扩大，我們并不必要用到外測度的理論。

定理 2. 設 μ 是 σ–环 $\mathbf{S}$ 上的測度，則由一切形如 $E \Delta N$ 之集組成的类 $\overline{\mathbf{S}}$ 是一个 σ–环，其中 $E \in \mathbf{S}$，N 是 $\mathbf{S}$ 中測度为零之集的子集。由等式 $\overline{\mu}(E \Delta N)=\mu(E)$ 确定的集函数 $\overline{\mu}$ 是 $\overline{\mathbf{S}}$ 上的一个完全測度。

測度 $\overline{\mu}$ 称为 μ 的**增补**。

証明。若 $E \in \mathbf{S}$，$N \subset A \in \mathbf{S}$，$\mu(A)=0$，則等式

$$E \cup N=(E-A)\,\Delta\,[A \cap (E \cup N)]$$

和

$$E \Delta N=(E-A) \cup [A \cap (E \Delta N)]$$

說明，$\overline{\mathbf{S}}$ 也可以描述为由一切形如 $E \cup N$ 之集組成的类，其中 $E \in \mathbf{S}$，

N 是 $\mathbf{S}$ 中测度为零之集的子集. 由此可見, 旣然类 $\overline{\mathbf{S}}$ 对于对称差的运算显然是封閉的, 对于可列併的运算也是封閉的, 因此 $\overline{\mathbf{S}}$ 是一个 σ-环. 若

$$E_1 \Delta N_1 = E_2 \Delta N_2,$$

其中 $E_i \in \mathbf{S}, N_i$ 是 $\mathbf{S}$ 中测度为零之集的子集, $i=1,2$, 則

$$E_1 \Delta E_2 = N_1 \Delta N_2,$$

因此 $\mu(E_1 \Delta E_2)=0$. 由此得出 $\mu(E_1)=\mu(E_2)$, 可見等式

$$\overline{\mu}(E \Delta N) = \overline{\mu}(E \cup N) = \mu(E)$$

無歧义地定出了集函数 $\overline{\mu}$. 将 $\overline{\mathbf{S}}$ 中的集表为 $E \cup N$ 的形式, 不难驗証 $\overline{\mu}$ 是一个测度; 又因 $\overline{\mathbf{S}}$ 包含 $\mathbf{S}$ 中测度为零之集的一切子集, 所以 $\overline{\mu}$ 是一个完全测度. ▌

下面的定理指出了测度的增补和利用外测度而得出的完全测度两者間的联系.

定理 3. 設 μ 是环 $\mathbf{R}$ 上的 σ-有限测度, μ^* 是由 μ 引出的外测度, 則 μ 在 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 上的扩張测度的增补与 μ^*-可测集类上的 μ^* 恒等.

証明. 我們以 $\mathbf{S}^*$ 表示 μ^*-可测集的全体所成的类, 以 $\overline{\mathbf{S}}$ 表示 μ 的增补 $\overline{\mu}$ 的定义域. 因为 μ^* 是 $\mathbf{S}^*$ 上的完全测度, 所以 $\overline{\mathbf{S}} \subset \mathbf{S}^*$, 并且在 $\overline{\mathbf{S}}$ 上 $\overline{\mu}$ 与 μ^* 重合. 剩下需要証明的只是 $\mathbf{S}^* \subset \overline{\mathbf{S}}$; 由于 μ^* 在 $\mathbf{S}^*$ 上是 σ-有限的(参看 §12 定理 5), 因此只需証明当 $E \in \mathbf{S}^*$ 并且 $\mu^*(E) < \infty$ 时必有 $E \in \overline{\mathbf{S}}$.

根据 §12 定理 3, E 有一个可测复盖 F. 因为 $\mu^*(F)=\mu(F)=\mu^*(E)$, $\mu^*(E)<\infty$, 并且 μ^* 是 $\mathbf{S}^*$ 上的测度, 所以 $\mu^*(F-E)=0$. $F-E$ 也有一个可测复盖 G, 并且

$$\mu(G) = \mu^*(F-E) = 0,$$

因此等式

$$E = (F-G) \cup (E \cap G)$$

将 E 表为两个集的併集: 一个是 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 中的集, 一个是 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 中测

度为零之集的子集。这就說明了 $E\in\bar{\mathbf{S}}$. ▌

不严格地説，定理 3 説明在 σ-有限的場合下，由全体 μ^*-可測集組成的 σ-环与由 R 产生的 σ-环 S(R) 相差不很大：每一个 μ^*-可測集适当地以一个測度为零的集加以修改，就成为 S(R) 中的集了。

在本节之末，我們引出一条極为有用的定理，这条定理是說明环上的測度和它在由环产生的 σ-环上的扩張两者間的关系的。

定理 4. 設 μ 是环 R 上的 σ-有限測度，則对于 S(R) 中具有有限測度的任意集 E，并对于任意正数 ε，存在 R 中的一个集 E_0 使得 $\mu(E\Delta E_0)\leqslant\varepsilon$。

証明。利用 §§10—12 的結論和本节定理 1 可知：

$$\mu(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i):E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,\quad E_i\in\mathbf{R},\quad i=1,2,\cdots\right\}.$$

因此，存在 R 中之集的一个叙列 $\{E_i\}$ 使

$$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,\qquad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\mu(E)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为

$$\lim_n\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right),$$

存在正整数 n 使

$$E_0=\bigcup_{i=1}^{n}E_i,\qquad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\mu(E_0)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

显然，$E_0\in\mathbf{R}$. 我們有

$$\mu(E-E_0)\leqslant\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i-E_0\right)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)-\mu(E_0)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

和

$$\mu(E_0-E)\leqslant\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i-E\right)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)-\mu(E)\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

定理于是証畢。▌

(1) 設 μ 是定义在环 R 上的非負有限实值集函数，并具有有限可加性．則按照 §10 确定的 μ^* 仍是一个外測度，因而 §11 定理 3 中的 $\bar{\mu}$ 仍旧可以形成，但 $\bar{\mu}$ 不一定是 μ 的扩張 (参看 10.2, 10.4e 和 11.4)．

(2) 設 R 是 §8 中所述的环，$\bar{\mu}$ 是 R 上的測度 μ 的扩張，則对于任何可列集 E，有 $E\in$ S(R) 和 $\bar{\mu}(E)=0$．

(3) 若类 R 不是一个环，則定理 1 中关于唯一性的結論不成立．(提示：令 $X=\{a,b,c,d\}$ 为由四个点构成的空間，在由 X 的一切子集組成的类上定义測度 μ_1 和 μ_2 如下：

$$\mu_1(\{a\})=\mu_1(\{d\})=\mu_2(\{b\})=\mu_2(\{c\})=1,$$
$$\mu_1(\{b\})=\mu_1(\{c\})=\mu_2(\{a\})=\mu_2(\{d\})=2.)$$

(4) 在定理 1 中，如将环改成半环，定理是否成立？

(5) 設 X 是一个可列集，R 是由 X 的子集組成的环，具有下述性質：R 中的每一个非空集是無限集，并且 S (R) 是由 X 的一切子集組成的类 (参看 9.7)．对于 X 的每一个子集 E，定义 $\mu_1(E)$ 为 E 中之点的个数，$\mu_2(E)=2\mu_1(E)$，則 μ_1 和 μ_2 在 R 上重合，但在 S(R) 上則不相等．因此，在定理 1 中，如果測度在 R 上不是 σ–有限的，則即使对于 S(R) 上全 σ–有限的測度而言，唯一性的結論也是不成立的．

(6) 設 μ 是 σ–环 S 上的測度，$\bar{\mu}$ 是它在 $\bar{\mathrm{S}}$ 上的增补．如果 $A\in$ S, $B\in$ S, $A\subset E\subset B$，并且 $\mu(B-A)=0$，則 $E\in\bar{\mathrm{S}}$．

(7) 設 X 是一个不可列集，S 是由一切可列集及其余集組成的类．对于 S 中每一个集 E，定义 $\mu(E)$ 为 E 中之点的个数．則 μ 是 S 上的一个完全測度，但 X 的每一个子集是 μ^*–可測集．因此，如果沒有 σ–有限性的假設，定理 3 不成立．

(8) 設 μ 和 ν 是环 R 上的 σ–有限測度，則对于 S(R) 中滿足关系 $\mu(E)<\infty$ 和 $\nu(E)<\infty$ 的每一个集 E，并对于任意正数 ε，存在 R 中的集 E_0 使得

$$\mu(E\Delta E_0)\leqslant\varepsilon \quad 和 \quad \nu(E\Delta E_0)\leqslant\varepsilon.$$

§14. 內　測　度

我們現在回到关于測度、外測度及其关系的一般的討論，目

的在于闡明測度論中十分有趣幷且具有历史性重要意义的一部分理論。

我們已經証明，如果 μ 是 σ-环 $\mathbf{S}$ 上的測度，則集函数 μ^*（对于可傳 σ-环 $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ 中每一个集 E,

$$\mu^*(E)=\inf\{\mu(F):E\subset F\in\mathbf{S}\})$$

是一个外測度；幷且如果 $\overline{\mathbf{S}}$ 是由全体 μ^*-可測集組成的 σ-环，則在 σ-有限的場合下，$\overline{\mathbf{S}}$ 上由 μ^* 引出的測度 $\bar{\mu}$ 就是 μ 的增补。現在我們定义由 μ **引出的內測度** μ_* 如下：对于 $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ 中每一个集 E，令

$$\mu_*(E)=\sup\{\mu(F):E\supset F\in\mathbf{S}\}.$$

在本节中，我們将研究 μ_* 以及它和 μ^* 的关系；我們将要說明，μ_* 的性質在某种意义下都是 μ^* 的性質的对偶。容易看出，集函数 μ_* 是非負的，单調的，幷且 $\mu_*(0)=0$；在下文中我們就要应用这些基本的性質，而不再加以任何解釋。在本节中，我們假定：

μ 是 σ-环 $\mathbf{S}$ 上的 σ-有限測度，μ^* 和 μ_* 分別是由 μ 引出的外測度和內測度，$\overline{\mathbf{S}}$ 上的測度 $\bar{\mu}$ 是 μ 的增补。

幷且我們記得，$\overline{\mathbf{S}}$ 上的 $\bar{\mu}$ 与 μ^*-可測集类上的 μ^* 恒等（§13 定理 3）。

定理 1. 設 $E\in\mathbf{H}(\mathbf{S})$，則

$$\mu_*(E)=\sup\{\bar{\mu}(F):E\supset F\in\overline{\mathbf{S}}\}.$$

証明。因为 $\mathbf{S}\subset\overline{\mathbf{S}}$，由 μ_* 的定义显然有

$$\mu_*(E)\leqslant\sup\{\bar{\mu}(F):E\supset F\in\overline{\mathbf{S}}\}.$$

另一方面，§13 定理 2 說明，对于 $\overline{\mathbf{S}}$ 中每一个 F，存在 $\mathbf{S}$ 中之集 G 使得 $G\subset F$ 幷且 $\bar{\mu}(F)=\mu(G)$。这就是說，μ 在 $\mathbf{S}$ 上可以取得 $\bar{\mu}$ 在 $\overline{\mathbf{S}}$ 上的每一个值，于是定理証明完畢。 ∎

設 $E\in\mathbf{H}(\mathbf{S})$，$F\in\mathbf{S}$，$F\subset E$，如果对于 $\mathbf{S}$ 中滿足关系式 $G\subset E-F$ 的每一个集 G，有 $\mu(G)=0$，則称 F 是 E 的一个**可測核心**。不严格地說，$\mathbf{H}(\mathbf{S})$ 中之集 E 的可測核心是 $\mathbf{S}$ 中被 E 所包的最大集。

定理 2. $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ 中每一个集 E 有一个可測核心。

証明. 設 $\hat{E}$ 是 E 的可测复盖, N 是 $\hat{E}-E$ 的可测复盖, 令 $F=\hat{E}-N$. 于是

$$F=\hat{E}-N\subset\hat{E}-(\hat{E}-E)=E;$$

又若 $G\subset E-F$, 則有

$$G\subset E-(\hat{E}-N)=E\cap N\subset N-(\hat{E}-E).$$

由此可見(因 N 是 $\hat{E}-E$ 的可測复盖) F 是 E 的一个可測核心. ▌

定理 3. 設 $E\in\mathbf{H}(\mathbf{S})$, F 是 E 的可測核心, 則 $\mu(F)=\mu_*(E)$; 如果 F_1 和 F_2 都是 E 的可測核心, 則 $\mu(F_1\Delta F_2)=0$.

証明. 因为 $F\subset E$, 显然有 $\mu(F)\leqslant\mu_*(E)$. 假定 $\mu(F)<\mu_*(E)$, 則 $\mu(F)$ 为有限, 根据 $\mu_*(E)$ 的定义, 存在 $\mathbf{S}$ 中的集 F_0 使得 $F_0\subset E$, $\mu(F_0)>\mu(F)$. 于是

$$F_0-F\subset E-F,$$

并且

$$\mu(F_0-F)=\mu(F_0)-\mu(F)>0,$$

这与集 F 的性質矛盾. 因此 $\mu(F)=\mu_*(E)$.

由关系式 $F_1\subset F_1\cup F_2\subset E$ 可以推出 $(F_1\cup F_2)-F_1\subset E-F_1$, 由于 F_1 是 E 的可測核心, 因此有

$$\mu((F_1\cup F_2)-F_1)=0.$$

类似地, 有

$$\mu((F_1\cup F_2)-F_2)=0.$$

因此

$$\mu(F_1\Delta F_2)=0. \quad ▌$$

定理 4. 設 $\{E_n\}$ 是 $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ 中之集的不相交叙列, 則

$$\mu_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu_*(E_n).$$

証明. 設 F_n 是 E_n 的可測核心, $n=1,2,\cdots$, 則由 μ 的可列可加性得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_*(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n)\leqslant\mu_*(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n). \quad \blacksquare$$

定理 5. 設 $A\in\mathbf{H(S)}$，$\{E_n\}$是$\overline{\mathbf{S}}$中之集的不相交叙列，$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=E$，則

$$\mu_*(A\cap E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_*(A\cap E_n).$$

証明. 設F是$A\cap E$的可测核心，則

$$\mu_*(A\cap E)=\mu(F)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\mu}(F\cap E_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu_*(A\cap E_n);$$

反方向的不等式可以利用定理 4 得出。 $\blacksquare$

定理 6. 若$E\in\overline{\mathbf{S}}$，則

$$\mu^*(E)=\mu_*(E)=\bar{\mu}(E);$$

反之，如果$E\in\mathbf{H(S)}$，并且

$$\mu^*(E)=\mu_*(E)<\infty,$$

則$E\in\overline{\mathbf{S}}$.

証明. 若$E\in\overline{\mathbf{S}}$，則集函数$\bar{\mu}$在$E$上取得定理 1 中的上确界和§12 定理 2 中的下确界值。为了証明逆命題，設A是E的可测核心，B是E的可测复盖。因为$\mu(A)=\mu_*(E)<\infty$，所以

$$\mu(B-A)=\mu(B)-\mu(A)=\mu^*(E)-\mu_*(E)=0,$$

又因$\bar{\mu}$是$\overline{\mathbf{S}}$上的完全测度，由此即得定理的結論（參看§11 定理 3 和 13.6）。 $\blacksquare$

定理 7. 設E和F是$\mathbf{H(S)}$中的不相交集，則

$$\mu_*(E\cup F)\leqslant\mu_*(E)+\mu^*(F)\leqslant\mu^*(E\cup F).$$

証明. 令A为F的可测复盖，B为$E\cup F$的可测核心。由于$B-A\subset E$，因此

$$\mu_*(E\cup F)=\mu(B)\leqslant\mu(B-A)+\mu(A)\leqslant\mu_*(E)+\mu^*(F).$$

現在，令A为E的可测核心，B为$E\cup F$的可测复盖。由于$B-A\supset F$，因此

$$\mu^*(E\cup F)=\mu(B)=\mu(A)+\mu(B-A)\geqslant\mu_*(E)+\mu^*(F).$$ ▌

定理 8. 設 $E\in\overline{\mathbf{S}}$, 则对于 X 的每一个子集 A, 有

$$\mu_*(A\cap E)+\mu^*(A'\cap E)=\bar{\mu}(E).$$

証明。对于 $A\cap E$ 和 $A'\cap E$ 应用定理 7, 我們得到

$$\mu_*(E)\leqslant\mu_*(A\cap E)+\mu^*(A'\cap E)\leqslant\mu^*(E).$$

但 $E\in\overline{\mathbf{S}}$, 因此, 根据定理 6, $\mu_*(E)=\mu^*(E)=\bar{\mu}(F)$. ▌

本节所得到的結果为我們指出了測度扩張定理的另一种接近方式——一种我們时常采用的接近方式。設 μ 是环 $\mathbf{R}$ 上的 σ-有限測度, μ^* 是 $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 上由 μ 引出的外測度, 则对于 $\mathbf{R}$ 中具有有限測度的任何集 E, 并对于 $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 中的任何集 A, 我們有

(a) $$\mu_*(A\cap E)=\mu(E)-\mu^*(A'\cap E).$$

如果我們能够証明下列命題: "若 E 和 F 是 $\mathbf{R}$ 中具有有限測度的两个集使得 $A\cap E=A\cap F$, 则 $\mu(E)-\mu^*(A'\cap E)=\mu(F)-\mu^*(A'\cap F)$", 我們就可以用等式(a)作为內測度的定义; 并且可以証明, $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 中具有有限外測度的集 E 是一个 μ^*-可測集, 其必要和充分条件为: $\mu_*(E)=\mu^*(E)$。讀者可以利用我們在本章中建立測度扩張定理所用的一些方法, 将上述接近过程的細节补出。

(1) 在 12.4 中, 如果将 μ^* 换为 μ_*, 命題是否成立?

(2) 如果对于內測度加以适当的有限性的补充条件, 则与 12.4 对偶的命題成立; 但 12.4 中原来的命題对于內測度不成立(參看 12.5).

(3) 設 E 是 $\overline{\mathbf{S}}$ 中具有有限測度的一个集, $F\subset E$, 并且 $\bar{\mu}(E)=\mu^*(F)+\mu^*(E-F)$, 则 $F\in\overline{\mathbf{S}}$. 换一句話說, F 的 μ^*-可測性可以用 $\overline{\mathbf{S}}$ 中一个固定的集 E(包含 F)測出, 而不必采用 $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ 中一切可能的集 A. (提示: 利用定理 8.)

(4) 类似于 11.6 的命題对于內測度是否成立?

(5) 設 $E\in\mathbf{H}(\mathbf{S})$, F 是 E 的可測复盖, 则对于每一个 μ^*-可測集 M, 有 $\bar{\mu}(F\cap M)=\mu^*(E\cap M)$. (提示: 对 $E=F\cap M$ 和 $A=E'$ 应用定理 8). 反之, 任何集 F 如果具有这个性質, 并且 $E\subset F\in\mathbf{S}$, 则 F 是 E 的可測复盖. 类似地, F 是 E 的可測核心, 其必要和充分条件是: $E\supset F\in\mathbf{S}$, 并且对于 $\overline{\mathbf{S}}$ 中每一个集 M, 有 $\bar{\mu}(F\cap M)=\mu_*(E\cap M)$.

§15. 勒貝格測度

本节的目的是要将一般的測度扩張定理应用到 §8 中所討論的測度上，从而导出一些經典性的結論，并介紹一些与之有关的术語。在本节內，我們假定：

X 是实数軸，$\mathbf{P}$ 是由一切形如 $[a, b)$ 的有界半閉区間組成的类，$\mathbf{S}$ 是由 $\mathbf{P}$ 产生的 σ-环，μ 是定义在 $\mathbf{P}$ 上的集函数，由等式 $\mu([a, b)) = b - a$ 确定。

σ-环 $\mathbf{S}$ 中的集称为直綫上的**波雷耳集**；根据 §8 定理 5 和 §13 定理 1，可設 μ 对于一切波雷耳集都有定义。設定义在 $\overline{\mathbf{S}}$ 上的 $\bar{\mu}$ 是 $\mathbf{S}$ 上 μ 的增补，則 $\overline{\mathbf{S}}$ 中的集称为直綫上的**勒貝格可測集**；測度 $\bar{\mu}$ 称为**勒貝格測度**. （$\mathbf{S}$ 上的不完全測度 μ 通常也称为勒貝格測度。）

因为整个数直綫 X 是 $\mathbf{P}$ 中可列無限多个集的併集，可見 $X \in \mathbf{S}$，因此 σ-环 $\mathbf{S}$ 和 $\overline{\mathbf{S}}$ 都是 σ-代数。由于 $\mu(X) = \infty$，因此 μ 在 $\mathbf{S}$ 上不是有限的，但因 μ 在 $\mathbf{P}$ 上是有限的，所以 μ 在 $\mathbf{S}$ 上以及 $\bar{\mu}$ 在 $\overline{\mathbf{S}}$ 上都是全 σ-有限的。μ 和 $\bar{\mu}$ 的其他性質将在以下一些定理中列举出来。

定理 1. 每一个可列集是波雷耳集，其測度为零。

証明。对于任意的 a，$-\infty < a < \infty$，我們有

$$\{a\} = \{x : x = a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x : a \leqslant x < a + \frac{1}{n}\right\},$$

因此

$$\mu(\{a\}) = \lim_n \mu\left(\left[a, a + \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_n \frac{1}{n} = 0,$$

由此可見，每一个单点集是測度为零的波雷耳集。但因波雷耳集的全体形成一个 σ-环，并且 μ 具有可列可加性，由此即得定理的結論。 ▌

定理 2. 設 $\mathbf{U}$ 是由一切开集組成的类，則波雷耳集类 $\mathbf{S}$ 与由

U 产生的 σ-环重合。

証明. 因为对于每一个实数 a, 集 $\{a\}$ 是一个波雷耳集, 由关系式 $(a,b)=[a,b)-\{a\}$ 可知, 每一个有界开区間是波雷耳集. 又因数直綫上的每一个开集可以表为有界开区間的可列併, 因此 $\mathbf{S}\supset\mathbf{U}$, 从而有 $\mathbf{S}\supset\mathbf{S}(\mathbf{U})$. 另一方面, 对于每一个实数 a, 我們有

$$\{a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}\right),$$

因此 $\{a\}\in\mathbf{S}(\mathbf{U})$. 由关系式 $[a,b),=(a,b)\cup\{a\}$ 可知 $\mathbf{P}\subset\mathbf{S}(\mathbf{U})$, 从而有

$$\mathbf{S}=\mathbf{S}(\mathbf{P})\subset\mathbf{S}(\mathbf{U}). \quad \blacksquare$$

定理 3. 設 **U** 是由一切开集組成的类, 則对于 X 的任意子集 E, 有

$$\mu^*(E)=\inf\{\mu(U): E\subset U\in\mathbf{U}\}.$$

証明. 由于 $\mu^*(E)=\inf\{\mu(F): E\subset F\in\mathbf{S}\}$, 并且 $\mathbf{U}\subset\mathbf{S}$, 我們有

$$\mu^*(E)\leqslant\inf\{\mu(U): E\subset U\in\mathbf{U}\}.$$

另一方面, 根据 μ^* 的定义, 对于任意正数 ε, 存在 **P** 中之集的叙列 $\{[a_n, b_n)\}$ 使

$$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)\leqslant\mu^*(E)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由此有

$$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, b_n\right)=U\in\mathbf{U}$$

和

$$\mu(U)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\mu^*(E)+\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的, 于是得到定理的結論. $\blacksquare$

定理 4. 設 T 是整个数直綫在其自身上的一一变换, 由等式

$T(x)=\alpha x+\beta$ 确定，其中 α 和 β 是实数，并且 $\alpha\neq 0$。如果对于 X 的任意子集 E，令 $T(E)$ 表一切形如 $T(x)$ 之点的集，其中 $x\in E$，即 $T(E)=\{\alpha x+\beta: x\in E\}$，則有

$$\mu^*(T(E))=|\alpha|\mu^*(E) \qquad \text{和} \qquad \mu_*(T(E))=|\alpha|\mu_*(E).$$

集 $T(E)$ 是波雷耳集或勒貝格可測集，当而且只当 E 分別是波雷耳集或勒貝格可測集时。

証明。只須在 $\alpha>0$ 的場合下証明定理。因若 $\alpha<0$，則变换 T 是由两个变换 T_1 和 T_2 合成的：$T(x)=T_1(T_2(x))$，其中 $T_1(x)=|\alpha|x+\beta$，$T_2(x)=-x$。我們留給讀者驗証下述事实：变换 T_2 将波雷耳集和勒貝格可測集分別变为波雷耳集和勒貝格可測集，并且每一个集的內測度和外測度都保持不变。

現在我們假定 $\alpha>0$，并設 $T(\mathbf{S})$ 是由一切形如 $T(E)$ 之集組成的类，其中 $E\in\mathbf{S}$。容易看出，$T(\mathbf{S})$ 是一个 σ-环；我們現在証明 $T(\mathbf{S})=\mathbf{S}$。設 $E=[a,b)\in\mathbf{P}$，令

$$F=\left[\frac{a-\beta}{\alpha},\ \frac{b-\beta}{\alpha}\right)\in\mathbf{P},$$

則 $E=T(F)\in T(\mathbf{S})$，因此 $\mathbf{S}\subset T(\mathbf{S})$。設 T^{-1} 是 T 的逆变换，$T^{-1}(x)=\dfrac{x-\beta}{\alpha}$，对于 T^{-1} 施行同样的推理，我們有 $\mathbf{S}\subset T^{-1}(\mathbf{S})$。再对这个关系式的两端施行变换 T，我們得到 $T(\mathbf{S})\subset\mathbf{S}$。因此 $T(\mathbf{S})=\mathbf{S}$。

若对于每一个波雷耳集 E，令

$$\mu_1(E)=\mu(T(E)), \qquad \mu_2(E)=\alpha\mu(E),$$

則 μ_1 和 μ_2 都是 $\mathbf{S}$ 上的測度。如果 $E=[a,b)\in\mathbf{P}$，則有 $T(E)=[\alpha a+\beta,\alpha b+\beta)$，并且

$$\mu_1(E)=\mu(T(E))=(\alpha b+\beta)-(\alpha a+\beta)=$$
$$=\alpha(b-a)=\alpha\mu(E)=\mu_2(E).$$

因此，根据 §8 定理 5 和 §13 定理 1，对于 $\mathbf{S}$ 中的每一个集 E，有 $\mu(T(E))=\alpha\,\mu(E)$。

将以上两段中导出的結論运用在逆变换 T^{-1} 上，我們得到

$$\begin{aligned}\mu^*(T(E)) &= \inf\{\mu(F): T(E)\subset F\in \mathbf{S}\}=\\ &=\inf\{\alpha\mu(T^{-1}(F)): E\subset T^{-1}(F)\in \mathbf{S}\}=\\ &=\alpha\inf\{\mu(G): E\subset G\in \mathbf{S}\}=\\ &=\alpha\mu^*(E).\end{aligned}$$

在这些等式中，将 inf 都换为 sup，μ^* 都换为 μ_*，$\subset$ 都换为 $\supset$，就有

$$\mu_*(T(E))=\alpha\mu_*(E),$$

其中 E 是任意的集.

如果 E 是一个勒貝格可測集，A 是任意的集，則

$$\begin{aligned}&\mu^*(A\cap T(E))+\mu^*(A\cap(T(E))')=\\ &=\mu^*(T(T^{-1}(A)\cap E))+\mu^*(T(T^{-1}(A)\cap E'))=\\ &=\alpha[\mu^*(T^{-1}(A)\cap E)+\mu^*(T^{-1}(A)\cap E')]=\\ &=\alpha\mu^*(T^{-1}(A))=\mu^*(A),\end{aligned}$$

因此 $T(E)$ 是勒貝格可測集. 将此結論运用在 T^{-1} 上，就完成了定理的証明. ▌

(1) 設 $\mathbf{C}$ 是由一切閉集組成的类，則波雷耳集类 $\mathbf{S}$ 与由 $\mathbf{C}$ 产生的 σ-环重合，并且对于 X 的任意子集 E，有

$$\mu_*(E)=\sup\{\mu(C): E\supset C\in\mathbf{C}\}.$$

(2) 对于每一个勒貝格可測集 E，存在两个波雷耳集 A 和 B 使得

$$A\subset E\subset B,\qquad \mu(B-A)=0,$$

其中 A 是一个 F_σ 集，B 是一个 G_δ 集.

(3) 有界集必具有有限外測度. 逆命題是否成立?

(4) 設 M 是单位閉区間 X 中全体有理数的集，枚举如下：$M=\{x_1, x_2,\cdots\}$. 对于任意的 $\varepsilon>0$，令 $F_i(\varepsilon)$ 为中心在 x_i，长度为 $\frac{\varepsilon}{2^i}$ 的开区間，$i=1, 2,\cdots$，并令

$$F(\varepsilon)=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i(\varepsilon),\qquad F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F\left(\frac{1}{n}\right),$$

則下列命題成立.

(4a) 存在 $\varepsilon>0$ 并存在 X 中的一点 x 使得 $x\,\overline{\in}\,F(\varepsilon)$.

(4b) $F(\varepsilon)$是开集，并且$\mu(F(\varepsilon))\leqslant\varepsilon$.

(4c) $X-F(\varepsilon)$是無处稠密集.

(4d) $X-F$是屬于第一种范疇的集. 由此可見，由于X是一个完备度量空間，所以F是不可列集（从而有$F\neq M$）.

(4e) F的测度为零.

因为$F\supset M$，命题(4e)对于可列集M（有如任何可列集）的测度为零这一事实給出了一个新的証明. 更有趣的是，测度为零的不可列集是存在的；参看(5).

(5) 設X是单位閉区間，将X中的每一个数x展为無限三进位小数，即

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n},\qquad a_n=0,1,2,\qquad n=1,2,\cdots,$$

并設C是由一切这样的数x組成的集：在x的展开式中，可以不必用到数字1.（如果我們沿用十进位小数的記号，以$0.a_1a_2\cdots$来表示

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n},$$

例如$\frac{1}{3}=0.1000\cdots=0.0222\cdots$，则有$\frac{1}{3}\in C$；但$\frac{1}{2}=0.111\cdots$是$\frac{1}{2}$的唯一的三进位小数展开式，所以$\frac{1}{2}\in' C$.）将$X$等分为三段，設$X_1$是中間一段所成的开区間，即$X_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$；剩下的两个閉区間，其併集为$X-X_1$，将这两个閉区間各等分为三段，設$X_2$和$X_3$分别是它們中間一段所成的开区間，即$X_2=\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$，$X_3=\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$；剩下的四个閉区間，其併集为$X-(X_1\cup X_2\cup X_3)$，将这四个閉区間又各等分为三段，取中間的四个开区間为X_4，X_5，X_6和X_7，依此类推，以至無穷. 則下列命題成立.

(5a) $C=X-\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$.（提示：将$X$中每一个$x$表为$x=0.a_1a_2\cdots$，$a_n=0,1,2$，$n=1,2,\cdots$，使当$x\in C$，必有$a_n=0$或$2$，$n=1,2,\cdots$. x的这样的表示方式是唯一的，并且 (i) $x\in X_1$当而且只当$a_1=1$；(ii)若$a\neq1$，則$x\in X_2\cup X_3$当而且只当$a_2=1$；(iii) 若$a_1\neq1$，$a_2\neq1$，則$x\in X_4\cup X_5\cup X_6\cup X_7$当而且只当$a_3=1$；$\cdots$.）

(5b) $\mu(C)=0$.

(5c) C 是無处稠密集．（提示：可假設 X 包含一个开区間，并且这个开区間与 $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ 的交集是空集．）

(5d) C 是完备集．（提示：区間 $X_1, X_2, \cdots$ 中的任何两个沒有公共点．）

(5e) C 具有連續統的势．（提示：考虑下列对应关系：对于 C 中每一个 x，$x=0.\alpha_1\alpha_2\cdots$，$\alpha_n=0$ 或 2，$n=1,2,\cdots$，以数 y 与之对应，y 的無限二进位小数展开式是 $y=0.\beta_1\beta_2\cdots$，$\beta_n=\frac{\alpha_n}{2}$，$n=1,2,\cdots$，即

$$y=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^{n+1}}.$$

在 C 和 X 之間，这个对应并非一对一的，但在 C 中的無理数与 X 中的無理数之間，它是一个一一对应．命題也可以借助于(5d)获得証明．）

C 称为**康脫集**．

(6) 由于波雷耳集类具有連續統的势（參看 5.9c），并且康脫集的每一个子集是勒貝格可测集（參看(5b)），因此存在非波雷耳集的勒貝格可測集．

(7) 单位閉区間中一切这样的点組成一个集：在每一点的無限二进位小数展开式中，一切偶数位的数字都是 0．則这个集是勒貝格可測集，其測度为零．

(8) 設 X 是欧几里得平面上一个圓的周界．在 X 中的波雷耳集类上，存在唯一的一个測度 μ 使得 $\mu(X)=1$，并使得 μ 对于 X 的一切旋轉是不变的．（圓周上的子集若屬于由圓上全体开弧組成的类所产生的 σ-环，則称为波雷耳集．）

(9) 設 g 是单实变数的連續有限增函数，$\overline{\mathbf{S}}_g$ 是包含全体波雷耳集的某个 σ-环，則在 $\overline{\mathbf{S}}_g$ 上存在唯一的一个完全測度 $\bar{\mu}_g$ 使得 $\bar{\mu}_g([a,b))=g(b)-g(a)$，并使得对于 $\overline{\mathbf{S}}_g$ 中每一个 E，存在一个波雷耳集 F 滿足 $\bar{\mu}_g(E\Delta F)=0$（參看 8.3）．$\bar{\mu}_g$ 称为由 g **引出的勒貝格-史蒂尔杰測度**．

§16. 不可測集

为了显示直綫上勒貝格可測集的全部結构，上节的討論还不够細致．特別是，确定是否有不可測集存在，就絕不是一个不重要的問題．本节的目的就在回答这一个問題，以及与之有关的一些

問題。我們即将看到，借以获得結論所用的方法，其中有一些与我們过去用过的方法完全不同。但因在測度論中，我們常常要用到这些方法，特别是在建立富有启發性的例子时；因此我們将詳細地加以解釋。在本节中，我們采用与 §15 中相同的記号。

設 E 是数直綫 X 的任意子集，a 是任意实数，我們以 $E+a$ 表示一切形如 $x+a$ 之数的集，其中 $x\in E$；一般地，若 E 和 F 都是 X 的子集，我們以 $E+F$ 表示一切形如 $x+y$ 之数的集，其中 $x\in E$，$y\in F$。以 $D(E)$ 表示一切形如 $x-y$ 之数的集，其中 $x\in E$，$y\in E$；$D(E)$ 称为 E 的**差集**。

定理 1. 設 E 是一个勒貝格可測集，具有正的有限測度，如果 $0\leqslant\alpha<1$，則存在开区間 U 使得 $\bar{\mu}(E\cap U)\geqslant\alpha\mu(U)$。

証明。設 $\mathbf{U}$ 是由一切开集組成的类。根据 §15 定理 3，$\bar{\mu}(E)=\inf\{\mu(U):E\subset U\in\mathbf{U}\}$，因此我們可以选取一个开集 U_0，使得 $E\subset U_0$ 并且 $\alpha\mu(U_0)\leqslant\bar{\mu}(E)$。如果 $\{U_n\}$ 是各項为开区間的不相交叙列，它的併集是 U_0，則有

$$\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\mu(U_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\mu}(E\cap U_n).$$

由此可見，至少有 n 的一个值能使 $\alpha\mu(U_n)\leqslant\bar{\mu}(E\cap U_n)$；我們就取这个 U_n 作为 U。 ▮

定理 2. 設 E 是一个勒貝格可測集，具有正的有限測度，則存在包含原点的一个开区間，这个开区間被 $D(E)$ 所包。

証明。如果 E 本身就是一个开区間，或者 E 包含一个开区間，則結論显然成立。对于一般的場合，我們应用定理 1，选取一个有界开区間 U，使得

$$\bar{\mu}(E\cap U)\geqslant\frac{3}{4}\mu(U).$$

如果 $-\frac{1}{2}\mu(U)<x<\frac{1}{2}\mu(U)$，則集

$$(E\cap U)\cup((E\cap U)+x)$$

被一个长度小于$\frac{3}{2}\mu(U)$的区間(即 $U\cup(U+x)$)所包. 假定 $E\cap U$ 和 $(E\cap U)+x$ 不相交,則因它們具有相等的測度,我們将有

$$\bar{\mu}((E\cap U)\cup[(E\cap U)+x])=2\bar{\mu}(E\cap U)\geqslant\frac{3}{2}\mu(U),$$

由此得出矛盾. 因此,$E\cap U$ 中至少有一个点屬于$(E\cap U)+x$, 这就証明了 $x\in D(E)$. 換一句話說, 区間$\left(-\frac{1}{2}\mu(U),\frac{1}{2}\mu(U)\right)$滿足定理中所述的条件. ▌

定理 3. 設 ξ 是一个無理数, n 和 m 是任意整数, 則一切形如 $n+m\xi$ 之数的集 A 在数直綫上是处处稠密的; 設 B 是一切形如 $n+m\xi$ 之数的集, 其中 n 是偶数, C 是一切形如 $n+m\xi$ 之数的集, 其中 n 是奇数, 則 B 和 C 在数直綫上也是处处稠密的.

証明. 对于每一个正整数 i, 存在唯一的整数 n_i(n_i 可为正、为負或为零) 使得 $0\leqslant n_i+i\xi<1$; 令 $x_i=n_i+i\xi$. 設 U 是任意一个开区間, 則存在正整数 k 使得 $\mu(U)>\frac{1}{k}$. 在单位区間中的 $k+1$ 个数 $x_1,\cdots,x_{k+1}$, 其中至少有两个数, 例如 x_i 和 x_j, 能够滿足关系式 $|x_i-x_j|<\frac{1}{k}$. 由此可見, x_i-x_j 的某个整数倍屬于区間 U, 也就是說, A 的某个元素屬于 U, 这就証明了定理中关于 A 的部分. 类似地, 只要将单位区間換为$[0,2)$, 就可以証明关于 B 的部分. 关于 C 的証明可由等式 $C=B+1$ 得出. ▌

定理 4. 至少有一个勒貝格不可測集 E_0 存在.

証明. 对于任意两个实数 x 和 y, 我們以記号 $x\sim y$ 表示 (只用在这个証明里) $x-y\in A$, 其中 A 是定理 3 中所述的集. 容易驗証, 关系"$\sim$"具有自反性, 对称性和推移性; 从而可知, 全体实数集可以看作是一些不相交集的併集, 其中每一个集包含与某一个給定的数成立关系"$\sim$"的一切数. 根据选擇公理, 存在集 E_0 包含上述每一个集中恰好一个点; 以下我們証明 E_0 是不可測的.

設 F 是一个波雷耳集使得 $F\subset E_0$. 由于差集 $D(F)$ 不可能包含

稠密集 A 中的任何非零元素，根据定理 2，F 的测度必为零，因此 $\mu_*(E_0)=0$。换一句話說，如果 E_0 是勒貝格可测集，它的测度必为零。

現在，設 a_1 和 a_2 是 A 中两个不相同的元素，則集 E_0+a_1 和 E_0+a_2 是不相交的（若 $x_1+a_1=x_2+a_2$，其中 $x_1\in E_0, x_2\in E_0$，則 $x_1-x_2=a_2-a_1\in A$，即 $x_1\sim x_2$，与 E_0 的定义相矛盾）。此外，由于整个数直綫被一切形如 E_0+a 之集組成的可列类所遮盖，其中 $a\in A$，即 $E_0+A=X$，因此，如果 E_0 是勒貝格可測的，則可推出每一个 E_0+a 是勒貝格可測集并且具有与 E_0 相同的測度。由此可見，E_0 是勒貝格可測集这一假定将导出 $\mu(X)=0$ 的結論，然而这是不可能的。▮

定理 4 的証明是熟知的。但对于以后要用到的一些反例的建立，下面的定理更为有力。

定理 5. 在数直綫上存在子集 M，使得对于任何勒貝格可測集 E，有

$$\mu_*(M\cap E)=0 \qquad \text{和} \qquad \mu^*(M\cap E)=\bar{\mu}(E).$$

証明. 設 A, B 和 C 是定理 3 中所述的集，則 $A=B\cup C$。令

$$M=E_0+B,$$

其中 E_0 是在定理 4 的証明中所建立起来的集。設 F 是一个波雷耳集使得 $F\subset M$，則差集 $D(F)$ 不可能包含稠密集 C 中的任何元素，因此根据定理 2 有 $\mu_*(M)=0$。由关系式

$$M'=E_0+C=E_0+(B+1)=M+1$$

可証 $\mu_*(M')=0$（参看 §15 定理 4）。如果 E 是任意勒貝格可測集，則由 μ_* 的单調性可得 $\mu_*(M\cap E)=\mu_*(M'\cap E)=0$。根据 §14 定理 8，就有 $\mu^*(M\cap E)=\bar{\mu}(E)$。▮

从本节所得到的結果中，还可以获得下述結論：不可能将勒貝格測度扩張到由数直綫的一切子集組成的类上，使得扩張出来的集函数仍是一个对于平移是不变的測度。

(1) 設 E 是一个勒貝格可测集，如果对于处处稠密集中的每一个数 x 有

$$\bar{\mu}(E\Delta(E+x))=0,$$

則或是 $\bar{\mu}(E)=0$，或是 $\bar{\mu}(E')=0$，二者必居其一.

(2) 設 $\mathbf{S}$ 是由集 X 的子集組成的某个 σ-环，μ 是 $\mathbf{S}$ 上的 σ-有限測度，μ^* 和 μ_* 分別是 $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ 上由 μ 引出的外測度和內測度. 設 M 是 $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ 中任意一个集，$\tilde{\mathbf{S}}$ 是由 M 以及 $\mathbf{S}$ 中全体集組成的类产生的 σ-环. 下列一系列命題的目的在于說明，μ 可以扩張成为 $\tilde{\mathbf{S}}$ 上的一个測度 $\tilde{\mu}$.

(2a) σ-环 $\tilde{\mathbf{S}}$ 是由形如 $(E\cap M)\Delta(F\cap M')$ 的一切集組成的类，其中 $E\in\mathbf{S}, F\in\mathbf{S}$.（提示：只須証明一切具有上述形式的集形成一个 σ-环. 我們指出：

$$(E\cap M)\Delta(F\cap M')=(E\cap M)\cup(F\cap M').)$$

(2b) 設 $\mu^*(M)<\infty$，如果 G 和 H 分別是 M 的可測核心和可測复盖，并令 $D=H-G$，則 $\tilde{\mathbf{S}}$ 中任何集与 D' 的交集屬于 $\mathbf{S}$.

(2c) 在 $\mathbf{S}$ 中存在集 G 和 H 使得 $G\subset M\subset H$, $\mu_*(M-G)=\mu_*(H-M)=0$，并使得 $\tilde{\mathbf{S}}$ 中任何集与 D' 的交集屬于 $\mathbf{S}$，其中 $D=H-G$.（提示：存在 $\mathbf{S}$ 中之集的不相交叙列 $\{X_n\}$ 使得 $\mu(X_n)<\infty, M=\bigcup_{n=1}^{\infty}(M\cap X_n)$.）

(2d) 沿用(2c)中的記号，則有 $\mu_*(M\cap D)=\mu_*(M'\cap D)=0$，从而有 $\mu^*(M\cap D)=\mu^*(M'\cap D)=\mu(D)$.

(2e) 沿用(2c)中的記号，如果

$$[(E_1\cap M)\Delta(F_1\cap M')]\cap D=[(E_2\cap M)\Delta(F_2\cap M')]\cap D,$$

其中 E_1, F_1, E_2 和 F_2 都是 $\mathbf{S}$ 中的集，則有

$$\mu(E_1\cap D)=\mu(E_2\cap D)\quad 和\quad \mu(F_1\cap D)=\mu(F_2\cap D).$$

（提示：利用下述事实：从等式

$$[(E_1\Delta E_2)\cap M\cap D]\Delta[(F_1\Delta F_2)\cap M'\cap D]=0$$

可以导出

$$(E_1\cap D)\Delta(E_2\cap D)\subset M'\cap D\quad 和\quad (F_1\cap D)\Delta(F_2\cap D)\subset M\cap D.)$$

(2f) 設 α 和 β 是非負实数滿足 $\alpha+\beta=1$. 沿用(2c)中的記号，并令

$$\tilde{\mu}((E\cap M)\Delta(F\cap M'))=$$
$$=\mu([(E\cap M)\Delta(F\cap M')]\cap D')+\alpha\,\mu(E\cap D)+\beta\mu(F\cap D),$$

則 $\tilde{\mu}$ 是 $\tilde{\mathbf{S}}$ 上的一个測度，它在 $\mathbf{S}$ 上与 μ 重合.

(3) 設 μ 是 σ-环 S 上的 σ-有限測度, $\{M_1, \cdots, M_n\}$ 是可傳 σ-环 H(S) 中之集的有限类, $\tilde{S}$ 是由类 $S \cup \{M_1, \cdots, M_n\}$ 产生的 σ-环, 則在 $\tilde{S}$ 上可以定义一个測度 $\tilde{\mu}$ 它在 S 上与 μ 重合. 对于 H(S) 中之集的無限叙列 $\{M_n\}$, 类似的命題是否成立?

(4) 下面的例子可以帮助我們从直观上理解不可測集; 事实上, 不可測集的一般性質都可以从这个例子里获得說明. 設

$$X=\{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

是单位正方形. 对于区間 $[0, 1]$ 的每一个子集 E, 令

$$\hat{E}=\{(x, y): x \in E, 0 \leqslant y \leqslant 1\} \subset X.$$

設 S 是由一切形如 $\hat{E}$ 的集組成的类, 其中 E 是勒貝格可測集. 定义 $\mu(\hat{E})$ 等于 E 的勒貝格測度. 集 $M=\{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y=\frac{1}{2}\}$ 就是一个不可測集: $\mu_*(M)=0, \mu^*(M)=1$.

(5) 設 μ^* 是定义在 X 的一切子集所成的类上的正則外測度, 使得 $\mu^*(X)=1$. 并設 M 是 X 的一个子集使得 $\mu_*(M)=0$, $\mu^*(M)=1$ (参看定理 5 和 (4)). 如果令 $\nu^*(E)=\mu^*(E)+\mu^*(E \cap M)$, 則 ν^* 是一个外測度 (参看 10.5 和 10.7).

(5a) 集 E 是 ν^*-可測集的必要和充分条件是: 它是 μ^*-可測集 (参看 12.6).

(5b) 設 A 是一个給定的集, 則对于包含 A 的一切 ν^*-可測集 E, $\inf \nu^*(E)=2 \mu^*(A)$. (提示: 如果 E 是 ν^*-可測集, 則 $\mu^*(E \cap M)=\mu^*(E)$.)

(5c) 外測度 ν^* 并非正則的. (提示: 以 M' 測驗正則性.)

第四章

可測函数

§17. 測度空間

設 X 是一个集，$\mathbf{S}$ 是由 X 的子集組成的一个 σ-环，滿足条件 $\bigcup \mathbf{S}=X$，我們称 X 和 $\mathbf{S}$ 是一个**可測空間**。通常可以用 X 表示可測空間，不致引起混淆；但有时对于可測空間中的 σ-环需要着重指出时，我們用記号 $(X, \mathbf{S})$ 代替 X。習慣上我們称 X 的子集 E 为**可測集**当而且只当它屬于 σ-环 $\mathbf{S}$ 时。这样的說法并不意味着，对于某一个外測度 μ^* 而言，$\mathbf{S}$ 是由全体 μ^*-可測集組成的 σ-环，甚至也并不表示在 $\mathbf{S}$ 上定义了一个測度或可以定义一个測度。

利用"可測集"这个术語，可測空間定义中的条件可以表达如下：全体可測集的併集就是整个空間；或者說，任意一个点必屬于某一个可測集。这一項限制的目的，就是要从空間中除去那些对于測度論無关紧要的点（或点集），从而可以免除無数次毫無必要的附加条件。

設 $(X, \mathbf{S})$ 是一个可測空間，μ 是 $\mathbf{S}$ 上的一个測度，我們称 $(X, \mathbf{S})$ 和 μ 是一个**測度空間**；正如同对待可測空間一样，我們也常以 X 表示測度空間。如果对于測度空間中的 σ-环及其上的測度需要着重指出时，我們用記号 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 代替 X。如果測度 μ 是[全]有限、σ-有限或完全的，則分別称測度空間 X 是[全]有限、σ-有限或完全的。对于測度空間，此后我們将不加解釋地引用定义在可傳 σ-环 $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ 上由 μ 引出的外測度 μ^* 和（在 σ-有限的場合下）內

測度 μ_*。

上一章大部分的結果說明了如何可以使一个可測空間成为測度空間。在本节中，我們將指出关于可測空間和測度空間的一些一般的性質；在本章的其他各节以及以后的章节中，轉而討論定义在測度空間上的函数，从原来的測度空間形成新的測度空間的有用的方法，以及一些重要的特殊情形的理論。

首先，我們看出，測度空間 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 的可測子集 X_0 本身就可以看作一个測度空間 $(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$，其中 $\mathbf{S}_0$ 是 X_0 的一切可測子集所成的类，并且对于 $E \in \mathbf{S}_0$，$\mu_0(E) = \mu(E)$。反之，如果 X 的某个子集 X_0 是一个測度空間 $(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$，則 X 可以作成一个測度空間 $(X, \mathbf{S}, \mu)$，其中 $\mathbf{S}$ 是由 X 的一切这样的子集組成的类：每一个集与 X_0 的交集屬于 $\mathbf{S}_0$，并且，对于 $E \in \mathbf{S}$，$\mu(E) = \mu_0(E \cap X_0)$。（对于可測空間，完全类似的論点也成立。）即使当 X 本身已是一个測度空間时，上述的結构方式只要稍加修改也是很有用的。設 X_0 是 X 的一个可測子集，則在 X 的一切可測子集 E 所成的类上可以定义一个新的測度 μ_0：$\mu_0(E) = \mu(E \cap X_0)$；容易驗証，$(X, \mathbf{S}, \mu_0)$ 是一个測度空間。

在上段的討論中，如果子集 X_0 不是一个可測集，我們可以得到甚么样的結論呢？为了回答这一个問題，我們引进一个新的概念。設 X_0 是測度空間 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 的子集，若对于每一个可測集 E 有 $\mu_*(E - X_0) = 0$，則称 X_0 是一个濃厚集。如果 X 本身是可測集，則 X_0 是濃厚集当而且只当 $\mu_*(X - X_0) = 0$；如果 μ 是全有限的，則 X_0 为濃厚集的必要和充分条件是：$\mu^*(X_0) = \mu(X)$。（濃厚集的例子可参看 §16 定理 5 和 16.4。）下面的定理是比前面的一些注解更为深刻的結論，它說明了測度空間的濃厚子集可以看作一个測度空間。

定理 1. 設 X_0 是測度空間 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 的濃厚子集。如果 $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S} \cap X_0$，并且对于 $E \in \mathbf{S}$，$\mu_0(E \cap X_0) = \mu(E)$，則 $(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$ 是一个測

度空間。

証明．如果 E_1 和 E_2 是 S 中二集使得 $E_1 \cap X_0 = E_2 \cap X_0$，则 $(E_1 \Delta E_2) \cap X_0 = 0$，于是 $\mu(E_1 \Delta E_2) = 0$，从而 $\mu(E_1) = \mu(E_2)$。換一句話說，μ_0 在 S_0 上的确是無歧义地确定的。

設 $\{F_n\}$ 是 S_0 中之集的不相交叙列，并設 E_n 是 S 中的一个集使得

$$F_n = E_n \cap X_0, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

如果令 $\tilde{E}_n = E_n - \bigcup \{E_i : 1 \leqslant i < n\}, n = 1, 2, \cdots$，則

$$(\tilde{E}_n \Delta E_n) \cap X_0 = (F_n - \bigcup \{F_i : 1 \leqslant i < n\}) \Delta F_n = F_n \Delta F_n = 0,$$

因此 $\mu(\tilde{E}_n \Delta E_n) = 0$，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\tilde{E}_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_n) =$$

$$= \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu_0(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n).$$

換一句話說，μ_0 是一个測度。 ▌

(1) 定理 1 的下述逆命題成立：設 (X, S, μ) 是一个測度空間，X_0 是 X 的子集使当 $E_1 \cap X_0 = E_2 \cap X_0$ 有 $\mu(E_1) = \mu(E_2)$，其中 E_1 和 E_2 是任意两个可測集，則 X_0 是濃厚集．（提示：若 $F \subset E - X_0$，則

$$(E - F) \cap X_0 = E \cap X_0.)$$

(2) 在 σ-有限的場合下，定理 1 可以借助于 16.2 中的結果获得証明．

(3) 下面的命題說明有限測度空間与全有限測度空間二者差別很小，虽然初看起来后者是比較更为特殊的一种空間．在任意有限測度空間 (X, S, μ) 中存在濃厚可測集 X_0．（提示：令 $c = \sup\{\mu(E) : E \in S\}$．如果 $\{E_n\}$ 是可測集的一个叙列使得 $\lim_n \mu(E_n) = c$，則可令 $X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$．容易看出：$\mu(X_0) = c$．）这个結果使我們在許多应用的場合下，可以假設一个有限測度空間是全有限的，因为我們可以将 X 換为 X_0，而不致十分丧失普遍性．下面是一个例子，說明有限測度空間可以不是全有限的．設 X 是数直綫，S 是由一切形如 $E \cup C$ 之集組成的类，其中 E 是 $[0, 1]$ 的一个勒貝格可測子集，C 是可列集，并設 μ 是 S 上的勒貝格測度．上述証明 X_0 存在的方法在測度論中常常会用到；这种方法称为穷举法．

(4) 設$(X, \mathbf{S}, \mu)$是完全，σ-有限測度空間，則每一个 μ^*-可測集是可測的。因此，对于完全，σ-有限測度空間来說，关于可測性的两个概念是等价的。

§18. 可 測 函 数

設f是定义在集 X 上的实值函数，M 是数直綫的一个子集。令

$$f^{-1}(M)=\{x: f(x)\in M\},$$

也就是說，$f^{-1}(M)$是 X 中一切这样的点所成的集：这些点被f映入集 M 內。我們称 $f^{-1}(M)$为集 M 对于 f 的原像。例如，設f是 X 的某个子集 E 的特征函数，則$f^{-1}(\{1\})=E, f^{-1}(\{0\})=E'$；一般地，如果 M 旣不包含 0 也不包含 1，包含 1 但不包含 0，包含 0 但不包含 1，或同时包含 0 和 1，則分別有

$$f^{-1}(M)=0, E, E' \text{或} X.$$

容易驗証，对于任意的函数f，有

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(M_n),$$
$$f^{-1}(M-N)=f^{-1}(M)-f^{-1}(N);$$

換一句話說，从数直綫的子集到 X 的子集間的映像 f^{-1}，保持集的运算不变。因此，如果 $\mathbf{E}$ 是数直綫上的一个集类（例如一个环或 σ-环)，具有某种代数上的性質，則$f^{-1}(\mathbf{E})$（即一切形如 $f^{-1}(M)$ 之集所成的类，其中 $M\in \mathbf{E}$) 是具有同样代数性質的一个类。在以下我們所特別感兴趣的将是这一种情形：就是当 $\mathbf{E}$ 是直綫上波雷耳集类的情形。

設 X 是一个集，此外并假設有一个由 X 的子集組成的 σ-环 $\mathbf{S}$，使得$(X, \mathbf{S})$是一个可測空間。对于 X 上的任意实值函数f(并对于任意广义实值函数)，令

$$N(f)=\{x: f(x)\neq 0\}.$$

如果对于直綫上的任何波雷耳集 M，实值函数 f 能使

$N(f) \cap f^{-1}(M)$为可測集，則称f是一个**可測函数**。

和这个定义有关的，我們必須作如下的一些說明。首先，必須着重指出，实数值0在这个定义里所扮演的特殊角色。我們选取0的理由，乃是由于它在实数的加法群里是单位元素。在下一章里，我們将引进关于某些可測函数的积分的概念；如果将积分法（它在測度論中無疑地是最重要的一个概念）看作加法的推广，就必須以不同于其他实数的态度来对待0这个数。

設f是X上的可測函数，如果令M为整个数直綫，則$N(f)$是一个可測集。因此，若E是X的可測子集，而M是直綫上的一个波雷耳集，則由等式

$$E \cap f^{-1}(M) = [E \cap N(f) \cap f^{-1}(M)] \cup [(E - N(f)) \cap f^{-1}(M)]$$

可知，$E \cap f^{-1}(M)$是可測集。（我們注意到，在上式右端中，$(E - N(f)) \cap f^{-1}(M)$或者是空集，或者等于$E - N(f)$。）换一句話說，如果将"对于任何波雷耳集$M$，定义在可測集$E$上的实値函数$f$能使$E \cap f^{-1}(M)$为可測集"作为"$f$**在**$E$**上可測**"的定义，則我們已經証明了可測函数在任何可測集上是可測的。特别，如果空間X本身是一个可測集，則f的可測性定义变为：对于直綫上的任何波雷耳集M，$f^{-1}(M)$是可測集。换一句話說，当X为可測集时，可測函数就是这样一个函数：它的逆映像将預先給定的一个σ-环（即直綫上波雷耳集的全体）中的集映成預先給定的另一个σ-环（即S）中的集。

可測函数的概念显然与σ-环S有关，因此如果在同时要考虑到不止一个σ-环的时候，我們就說函数f对于S是可測的，或者更簡单地說，f是(S)可測的。特别，如果X是数直綫，S是波雷耳集类，$\bar{S}$是勒貝格可測集类，則对于S是可測的函数称为**波雷耳可測函数**，而对于$\bar{S}$是可測的函数則称为**勒貝格可測函数**。

下面的事实也必須着重地加以指出：正如同在§17中所用到的关于集的可測性概念一样，函数的可測性概念仅与預先給定的

σ–环 S 有关，而与預先給定的測度 μ 的数值無关。根据这样一个論点，一个集或一个函数被命名为可測的，这純粹只是集論里的概念，而与測度論完全無关。

这种情况与近世拓扑空間理論中的情况有其类似之处。在拓扑空間論中，某种集被称为开集，某种函数被称为連續函数，而与度量無关。度量之是否存在，是一个有趣的問題，但通常总是一个無关紧要的問題；虽然度量这个术語可以用来定义开集和連續性。上述的类似性实質上比初看起来更为深刻：讀者如果熟悉拓扑空間上連續函数的理論，就会記得，函数 f 是連續的，必須而且只須，对于变程(在我們現在的情形就是数直綫)中的任何开集 M, $f^{-1}(M)$ 屬于預先給定的集类，而这个集类中的集是被称为开集的。

对于广义实值函数，我們也必須引进可測性的概念。为此目的，我們只需約定，将扩張的数直綫上的单点集$\{-\infty\}$和$\{\infty\}$列入波雷耳集类，然后将实值函数的可測性定义逐字逐句地加以重复就行了。于是，如果对于直綫上的任何波雷耳集 M，广义实值函数 f 能使下列三个集

$$f^{-1}(\{-\infty\}),\qquad f^{-1}(\{\infty\})\qquad \text{和}\qquad N(f)\cap f^{-1}(M)$$

都是可測集，則称 f 是一个可測函数。我們看出，扩張的波雷耳集类不再是由半閉区間类产生的 σ–环了。

以下我們将極其詳尽地研究并試圖闡明可測函数的結构。首先我們有下面这个相当有用的定理。

定理 1. 可測空間 (X, S) 上的实值函数 f 为可測函数的必要和充分条件是：对于任何实数 c, $N(f)\cap\{x: f(x)<c\}$是可測集。

証明。設 $M=\{t: t<c\}$，則 M 是一个波雷耳集，并且 $f^{-1}(M)=\{x: f(x)<c\}$。因此，条件显然是必要的。

現在我們証明条件是充分的。設对于任何实数 c, $N(f)\cap\{x: f(x)<c\}$是可測集。如果 c_1 和 c_2 是两个实数，$c_1\leqslant c_2$，則

$$\{x: f(x)<c_2\}-\{x: f(x)<c_1\}=\{x: c_1\leqslant f(x)<c_2\}.$$

换一句話說，对于任何半閉区間 $M=[c_1, c_2)$，$N(f)\cap f^{-1}(M)$ 可以表为两个可测集的差集，因此它是可测的。設 $\mathbf{E}$ 是扩張的数直綫上一切这样的子集 M 組成的类：M 能使 $N(f)\cap f^{-1}(M)$ 为可测集。因为 $\mathbf{E}$ 是一个 σ-环，并且它包含一切半閉区間，因此它也包含一切波雷耳集。定理于是証明完畢。 ▌

(1) 在定理1中，如果将 $<$ 换为 $\leq$ 或 $>$ 或 $\geq$，定理仍成立。(提示：如果 $-\infty<c<\infty$，则

$$\{x: f(x)\leq c\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x: f(x)<c+\frac{1}{n}\}.)$$

(2) 在定理1中，如果我們限制 c 屬于处处稠密的一个实数集，定理仍成立。

(3) 設 f 是一个可測函数，c 是一个实数，則 cf 是可測函数。

(4) 設 E 是一个可測集，則它的特征函数是一个可測函数。逆命題是否成立？

(5) 非零的常数是可測函数，必須而且只須 $X\in\mathbf{S}$。

(6) 設 X 是数直綫，f 是一个增函数，則 f 是波雷耳可測的。是否每一个連續函数都是波雷耳可測的？

(7) 設 X 是数直綫，E 是一个勒貝格不可測集；并設

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } x\in E,\\ -x, & \text{当 } x\in' E.\end{cases}$$

f 是不是勒貝格可測函数？

(8) 設 f 是可測函数，則对于任何实数 c，$N(f)\cap\{x: f(x)=c\}$ 是可測集。逆命題是否成立？

(9) 如果复值函数的实部与虛部都是可測的，則称这个复值函数是可測函数。复值函数 f 为可測的必要和充分条件是：对于复平面上的任何开集 M，$N(f)\cap f^{-1}(M)$ 是可測集。

(10) 設 f 是可測空間 $(X, \mathbf{S})$ 上的实值函数。对于任意的实数 t，令 $B(t)=\{x: f(x)\leq t\}$。則

(10a) 当 $s<t$ 时，必有 $B(s)\subset B(t)$，

(10b) $\bigcup_t B(t)=X$, $\bigcap_t B(t)=0$,

(10c) $$\bigcap_{s<t} B(t)=B(s).$$

反之，如果$\{B(t)\}$是由具有性質(10a)，(10b)和(10c)之集組成的一个类，則存在唯一的有限实值函数f使得$\{x: f(x)\leqslant t\}=B(t)$.（提示：令 $f(x)=$ $=\inf\ \{t: x\in B(t)\}$.）

(11) 設$(X,\mathbf{S},\mu)$是一个全有限测度空間，f是$(X,\mathbf{S},\mu)$上的一个可测函数．如果对于扩张的数直綫上的任何波雷耳集M，令$\nu(M)=\mu(f^{-1}(M))$，則ν是波雷耳集类上的一个测度．設g是由等式$g(t)=\mu(\{x: f(x)<t\})$确定的单实变量函数．如果f是有限的，則g具有下列性質：它是单調增加的，左連續的，并且$g(-\infty)=0, g(\infty)=\mu(X)$；我們称$g$为$f$的**分布函数**．如果$g$是連續的，則由$g$引出的勒貝格-史蒂尔杰测度$\mu_g$（参看15.9）是$\nu$的增补．設$f$是可测集$E$的特征函数，則$\nu(M)=\chi_M(1)\mu(E)+\chi_M(0)\mu(E')$.

§19. 可测函数的运算

定理 1. 設f和g是可测空間$(X,\mathbf{S})$上的广义实値可测函数，c是任意实数，并設

$$A=\{x: f(x)<g(x)+c\},$$
$$B=\{x: f(x)\leqslant g(x)+c\},$$
$$C=\{x: f(x)=g(x)+c\}.$$

則A, B, C三者中的每一个与任何可测集的交集是可测集．

証明．設M是全体有理数的集．定理中关于A的結論可由等式

$$A=\bigcup_{r\in M}[\{x: f(x)<r\}\cap\{x: r-c<g(x)\}]$$

推出；而关于B和C的結論則分別由等式

$$B=X-\{x: g(x)<f(x)-c\} \qquad \text{和} \qquad C=B-A$$

推出．▌

定理 2. 設ϕ是定义在扩張的数直綫上的广义实値波雷耳可测函数，具有性質$\phi(0)=0$．如果X是一个可测空間，f是定义在X上的一个广义实値可测函数，則由等式$\tilde{f}(x)=\phi(f(x))$确定的

函数 $\tilde{f}$ 是定义在 X 上的可测函数。

証明。在这里直接运用可測函数的定义比利用 §18 中的必要充分条件更为方便。設 M 是扩張的数直綫上的任意波雷耳集，則

$$N(\tilde{f})\cap\tilde{f}^{-1}(M)=\{x:\phi(f(x))\in M-\{0\}\}=$$
$$=\{x:f(x)\in\phi^{-1}(M-\{0\})\}.$$

由于 $\phi(0)=0$，我們有

$$\phi^{-1}(M-\{0\})=\phi^{-1}(M-\{0\})-\{0\}.$$

因为 ϕ 是波雷耳可測的，所以 $\phi^{-1}(M-\{0\})$ 是一个波雷耳集；根据 f 的可測性就得到集

$$N(\tilde{f})\cap\tilde{f}^{-1}(M)=N(f)\cap f^{-1}(\phi^{-1}(M-\{0\}))$$

的可測性。▌

容易驗証，对于任意的实数 $\alpha>0$，由等式 $\phi(t)=|t|^{\alpha}$ 确定的，定义在整个数直綫上的函数 ϕ 是波雷耳可測函数。因此，如果函数 f 是可測的，則 $|f|^{\alpha}$ 也是可測的。类似地，可測函数的正整数乘冪以及(实)常数与可測函数的乘积都是可測函数。如果我們考虑两个或多个实变数的波雷耳可測函数，則运用类似的論点可以証明，两个可測函数的和与积都是可測函数。但是我們現在还沒有建立多变数函数的波雷耳可測性概念，所以我們暫时中止这方面的討論，轉而直接証明和与积的可測性。

定理 3. 設 f 和 g 是可測空間 X 上的广义实值可測函数，則 $f+g$ 和 fg 都是可測函数。

証明。如果在点 x 处，$f(x)$ 和 $g(x)$ 二数中至少有一为無限，則只要考察几种可能的情形，就可以知道，$f(x)+g(x)$ 和 $f(x)g(x)$ 的意义是很容易了解的。因此，我們可以只考虑有限值的函数(順便提醒一下，如果 $f(x)=\pm\infty$ 而 $g(x)=\mp\infty$，則 $f(x)+g(x)$ 沒有意义)。

当 f 和 g 为有限时，对于任意的实数 c，我們有

$$\{x:f(x)+g(x)<c\}=\{x:f(x)<c-g(x)\}.$$

在定理 1 中以 $-g$ 代 g，即得 $f+g$ 的可測性。fg 的可測性可由恒等式

$$fg=\frac{1}{4}[(f+g)^2-(f-g)^2]$$

得出。

当 f 和 g 为有限时，我們有

$$f\cup g=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$$

和

$$f\cap g=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|);$$

因此，根据定理 2 和定理 3，由 f 和 g 的可測性可以推出 $f\cup g$ 和 $f\cap g$ 的可測性。如果对于任意的广义实值函数 f，令

$$f^+=f\cup 0 \qquad 和 \qquad f^-=-(f\cap 0),$$

則有

$$f=f^+-f^- \qquad 和 \qquad |f|=f^++f^-.$$

函数 f^+ 和 f^- 分别称为函数 f 的**正部**和**負部**。根据上面的討論可知，可測函数的正部和負部都是可測的；反之，如果一个函数的正部和負部都是可測的，則这个函数本身也是可測的。

(1) 設 f 是一个函数，如果 $|f|$ 是可測的，則 f 是否一定可測？

(2) 如果 X 是可測集，則在定理 2 中即使将 $\phi(0)=0$ 这个条件除去，定理仍成立；換一句話說，在这种場合下，可測函数的波雷耳可測函数是一个可測函数．

(3) 即使当 X 是可測集时，可測函数的勒貝格可測函数也不一定是可測函数．下面一系列叙述的目的，就在于証明上述的命題．我們将給出一个勒貝格可測的实变数函数 $\phi(y)$，以及一个連續并且遞增（在严格意义下）的函数 $f(x)$，其中 x 是实变数，$0\leq x\leq 1$，使得 $\tilde{f}(x)=\phi(f(x))$ 是勒貝格不可測的．

設 $X=[0,1]$．对于每一个 $x\in X$，令

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}=0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots,$$

其中 $\alpha_i=0,1$ 或 2, $i=1,2,\cdots$. 如果 C 是在 15.5 中所定义的康脱集，则当 $x\in C$, 有 $\alpha_i=0$ 或 2, $i=1,2,\cdots$. 設 $n=n(x)$ 是使得 $\alpha_n=1$ 的第一个指标；如果这样的 n 不存在，也就是說，如果 $x\in C$, 则令 $n(x)=\infty$. 現在定义函数 ψ 如下：

$$\psi(x)=\sum_{1\leqslant i<n}\frac{\alpha_i}{2^{i+1}}+\frac{1}{2^n}.$$

(函数 ψ 有时称为**康脱函数**.)

(3a) 如果 $0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1$, 则

$$0=\psi(0)\leqslant\psi(x)\leqslant\psi(y)\leqslant\psi(1)=1.$$

(提示：如果 $x=0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\leqslant y=0.\beta_1\beta_2\beta_3\cdots$, 并設对于 $1\leqslant i<j$ 有 $\alpha_i=\beta_i$, 则 $\alpha_j\leqslant\beta_j$.)

(3b) 函数 ψ 是連續的. (提示：如果 $x=0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$, $y=0.\beta_1\beta_2\beta_3\cdots$, 并設对于 $1\leqslant i<j$ 有 $\alpha_i=\beta_i$, 则

$$|\psi(x)-\psi(y)|\leqslant\frac{1}{2^{j-1}}.)$$

(3c) 对于每一个 $x\in X$, 存在唯一的一个数 y, $0\leqslant y\leqslant 1$, 使得 $x=\frac{1}{2}(y+\psi(y))$; 这个方程确定了 y 是 x 的一个函数，記为 $y=f(x)$. f 是定义在 X 上的連續函数，并且它是在严格意义下遞增的. (提示：$\frac{1}{2}(y+\psi(y))$ 是連續的，并且是在严格意义下遞增的.)

(3d) 集 $f^{-1}(C)$ 是勒貝格可测集，并具有正的测度. (提示：集

$$\psi(X-C)=\{\psi(y): y\in X-C\}$$

是可列集，因此它的测度为零；由此可知

$$\mu(f^{-1}(X-C))=\frac{1}{2}.)$$

(3e) 存在勒貝格可测集 M, $M\subset\{y: 0\leqslant y\leqslant 1\}$, 使得 $f^{-1}(M)$ 是勒貝格不可测集. (提示：根据 §16 定理 5, $f^{-1}(C)$ 包含一个不可测子集. 我們記得，如果一个集的勒貝格测度是零，则它的每一个子集都是勒貝格可测集.)

(3f) 設 M 是 (3e) 中所述的集，ϕ 是 M 的特征函数. 如果

$\tilde{f}(x)=\phi(f(x))$，則 ϕ 是勒貝格可測的，而 $\tilde{f}$ 則不是.

(4) 在 (3e) 中所述的集 M 是一个非波雷耳集的勒貝格可测集的例子(参看 15.6).

§20. 可测函数列

定理 1. 設 $\{f_n\}$ 是可測空間 X 上的广义实值可测函数列，則由等式

$$h(x)=\sup\{f_n(x):n=1,2,\cdots\},$$
$$g(x)=\inf\{f_n(x):n=1,2,\cdots\},$$
$$f^*(x)=\limsup_n f_n(x),$$
$$f_*(x)=\liminf_n f_n(x)$$

确定的函数 h,g,f^* 和 f_* 都是可测函数.

証明. 很容易将一般情形化为有限值函数的情形. g 的可测性可由等式

$$\{x:g(x)<c\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:f_n(x)<c\}$$

推出. h 的可测性則可由关系式

$$h(x)=-\inf\{-f_n(x):n=1,2,\cdots\}$$

推出. 由关系式

$$f^*(x)=\inf_{n\geq 1}\sup_{m\geq n}f_m(x)$$

和

$$f_*(x)=\sup_{n\geq 1}\inf_{m\geq n}f_m(x)$$

分别得出 f^* 和 f_* 的可测性. ∎

由定理 1 可知，可测函数列 $\{f_n\}$ 的收斂点集，即集

$$\{x:\limsup_n f_n(x)=\liminf_n f_n(x)\},$$

与任何可測集的交集是可測集. 从而可知，由等式 $f(x)=\lim_n f_n(x)$ 确定的，定义在使 $\lim_n f_n(x)$ 存在的一切点 x 之集上的函数 f 是一个可测函数.

下述簡单函数的概念是可测函数論中極为有用的概念。設 X 是一个可测空間，如果 f 是定义在 X 上具有下列性質的函数：存在可测集的不相交有限类 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 以及实数有限集 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 使得

$$f(x)=\begin{cases}\alpha_i, & \text{当 } x \in E_i, \qquad i=1, \cdots, n, \\ 0, & \text{当 } x \in' E_1 \cup \cdots \cup E_n,\end{cases}$$

则称 f 为**簡单函数**（我們着重指出，簡单函数所取的值只限于有限实数，这个事实在以下的討論中是很重要的）。換一句話說，簡单函数是这样的一个函数：它只取得有限个异于零的值，每一个值是在一个可测集上取得的。

可测集 E 的特征函数 χ_E 是簡单函数最簡单的例子。不难驗証，每一个簡单函数是可测的；事实上，对于上述的簡单函数 f，我們有

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x).$$

两个簡单函数的乘积以及有限个簡单函数的綫性組合仍为簡单函数。

定理 2. *每一个广义实值可测函数 f 可以表为一个簡单函数列 $\{f_n\}$ 的極限；如果 f 是非負的，则每一个 f_n 可以取为非負的，并且可取 $\{f_n\}$ 为增叙列。*

証明．首先假定 $f \geqslant 0$．对于每一个 $n=1, 2, \cdots$，并对于每一个 $x \in X$，令

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{i-1}{2^n}, & \text{若 } \dfrac{i-1}{2^n} \leqslant f(x)<\dfrac{i}{2^n}, \qquad i=1, 2, \cdots, 2^n n, \\ n, & \text{若 } f(x) \geqslant n.\end{cases}$$

显然，f_n 是非負的簡单函数，并且函数列 $\{f_n\}$ 是遞增的。如果 $f(x)<\infty$，则对于任意的 n，有

$$0 \leqslant f(x)-f_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n};$$

如果$f(x)=\infty$，則对于任意的n，有$f_n(x)=n$。这就証明了定理的后半部。将这个結果分别运用到函数f^+和f^-上（并由于两个简单函数的差仍为簡单函数），就得到定理前半部的証明。▌

(1) 在本节和上节中引进的全部概念以及由此获得的全部結論（当然要除去有关实数次序性質的一些命題）都可以推广到复值函数的場合.

(2) 在定理2中，如果函数f是有界的，則可以选取$\{f_n\}$使它一致收斂到f.

(3) 在簡单函数的定义中，如果允許有可列無限多个集E_i以及可列無限多个对应的实数a_i，我們就得到**初等函数**的概念．每一个实值可测函数f可以表为一个一致收斂的初等函數列的極限.

§21. 几乎处处收斂性

在以上三节中，我們建立了可測函数的一些理論，这些理論的建立，尽可能地避免用到測度的概念。从現在起，我們将假定所考慮的空間X是一个測度空間$(X, \mathbf{S}, \mu)$。

設有一个命題，如果在測度空間中除去一个測度为零的可测集外，命題对于任何其他的点都成立，則称命題在**几乎所有的点**成立，或称命題**几乎处处**成立。例如，若存在实数c使得$\{x: f(x)\neq c\}$是一个測度为零的集，我們就說函数f几乎处处是常数。如果函数f几乎处处是有界的，也就是說，如果存在正的常数c使得$\{x: |f(x)|>c\}$是一个測度为零的集，則称f是**本性有界的**。滿足上述条件的数c，它們的下确界称为$|f|$的**本性上确界**，記为

$$\text{ess sup } |f| .$$

設$\{f_n\}$是一个广义实值函数列，它在測度空間X上几乎处处收斂到一个極限函数f。这就是說，存在測度为零的集E_0（E_0也可能是空集），对于每一个$x \in' E_0$并对于每一个$\varepsilon>0$，可以找到一个整数$n_0=n_0(x,\varepsilon)$，使当$n\geqslant n_0$，有

$$f_n(x)<-\frac{1}{\varepsilon}, \qquad 若 f(x)=-\infty,$$

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon, \quad 若\ -\infty<f(x)<\infty,$$

$$f_n(x)>\frac{1}{\varepsilon}, \quad 若 f(x)=\infty.$$

設 $\{f_n\}$ 是一个实值函数列，如果存在測度为零的集 E_0，对于每一个 $x\in' E_0$ 幷对于每一个 $\varepsilon>0$，可以找到一个整数 $n_0=n_0(x,\varepsilon)$ 使当 $n\geqslant n_0, m\geqslant n_0$，有

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon,$$

則称 $\{f_n\}$ **是几乎处处基本**的。

显然，如果一个函数列几乎处处收斂到一个有限值極限函数，則这个函数列是几乎处处基本的；反之，每一个几乎处处基本的函数列必定几乎处处收斂到一个有限值極限函数。如果函数列几乎处处收斂到 f，同时也几乎处处收斂到 g，則几乎处处有 $f(x)=g(x)$；也就是說，在精确到一个測度为零的集的程度內，極限函数是唯一确定的。

今后我們将涉及几个不同种类的收斂性概念，在每一种情形我們总是采用与上面所述完全类似的术語。因此，如果我們对于 $\{f_n\}$ 趋向極限 f 引进一种新的收斂性定义："对于大的 n，f_n 按照某种指定的意义接近于 f"，則今后我們将不加解釋地引用下述概念：在这种新的意义下，$\{f_n\}$ 是基本的，即"对于大的 n 和 m，差 f_n-f_m 按照指定的意义接近于 0"。

作为实值函数列新的收斂性概念的一个例子，我們首先引进几乎处处**一致收斂**的概念。設 $\{f_n\}$ 是一个实值函数列，如果存在測度为零的集 E_0，对于每一个 $\varepsilon>0$，可以找到一个整数 $n_0=n_0(\varepsilon)$，使当 $n\geqslant n_0$，$x\in' E_0$，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

則称 $\{f_n\}$ **几乎处处一致收斂到** f；换一句話說，就是函数列在集 $X-E_0$ 上一致收斂到 f（在通常的意义下）。不难驗証，一个叙列几乎处处一致收斂到一个極限函数当而且只当这个叙列是几乎处处

一致基本的。

下面的定理称为叶果洛夫定理。这个定理建立了几乎处处收斂性与一致收斂性之間極为有趣并且有用的联系。

定理 1. 設 E 是具有有限测度的可測集，$\{f_n\}$ 是几乎处处有限的可測函数列，$\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收斂到有限值可測函数 f，則对于每一个 $\varepsilon>0$，存在 E 的可測子集 F 使得 $\mu(F)<\varepsilon$ 并使得 $\{f_n\}$ 在 $E-F$ 上一致收斂到 f。

証明。如果有必要，可以从 E 中除去一个測度为零的集，因此我們可以假定 $\{f_n\}$ 在 E 上处处收斂到 f. 令

$$E_n^m=\bigcap_{i=n}^{\infty}\left\{x: |f_i(x)-f(x)|<\frac{1}{m}\right\},$$

則

$$E_1^m\subset E_2^m\subset\cdots,$$

又因 $\{f_n\}$ 在 E 上收斂到 f，所以对于每一个 $m=1,2,\cdots$，有

$$\lim_n E_n^m\supset E.$$

于是 $\lim_n\mu(E-E_n^m)=0$，从而存在正整数 $n_0=n_0(m)$ 使得

$$\mu(E-E_{n_0(m)}^m)<\frac{\varepsilon}{2^m}.$$

(n_0 当然与 ε 有关，但在整个証明过程中 ε 保持不变。)如果

$$F=\bigcup_{m=1}^{\infty}(E-E_{n_0(m)}^m),$$

則 F 是一个可測集，$F\subset E$，并且

$$\mu(F)=\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}(E-E_{n_0(m)}^m)\right)\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\mu(E-E_{n_0(m)}^m)<\varepsilon.$$

如果 $x\in E-F=E\cap\bigcap_{m=1}^{\infty}E_{n_0(m)}^m$，則 $x\in E_n^m$，其中 $n\geqslant n_0(m)$。因此，$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{m}$。这就証明了 $\{f_n\}$在 $E-F$ 上是一致收斂的。 ▍

由于叶果洛夫定理的啓發，我們現在引进下述概念。設 $\{f_n\}$ 是一个几乎处处有限的可測函数列，如果对于每一个 $\varepsilon>0$，存在一

个可測集 F 使得 $\mu(F)<\varepsilon$ 并使得 $\{f_n\}$ 在 F' 上一致收斂到一个有限值可測函数 f, 則称 $\{f_n\}$ **几乎一致收斂**到 f. 按照这种說法, 叶果洛夫定理可以表述如下: 在一个具有有限測度的集上, 由几乎处处收斂性可以推出几乎一致收斂性. 下面是逆方向的定理.

定理 2. 設可測函数列 $\{f_n\}$ 几乎一致收斂到 f, 則 $\{f_n\}$ 几乎处处收斂到 f.

証明. 設 F_n 是一个可測集使得 $\mu(F_n)<\frac{1}{n}$ 并使得 $\{f_n\}$ 在 F_n' 上一致收斂到 f, $n=1,2,\cdots$. 令 $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$, 則有

$$\mu(F)\leqslant\mu(F_n)<\frac{1}{n},$$

从而有 $\mu(F)=0$; 于是, 对于 $x\in F'$, $\{f_n(x)\}$ 显然收斂到 $f(x)$. ∎

我們注意到, "几乎一致收斂"是一个不很正确的(但可惜却是标准的)名称, 因为它很容易和"几乎处处一致收斂"相混. 也許类似"近于一致收斂"的名称比較更能表达出事实的真相; 然而事已如此, 我們必須对几乎一致收斂与几乎处处一致收斂这两个名称留心加以区别.

(1) 設 f 是直綫上的实值勒貝格可測函数, 則存在波雷耳可測函数 g 使得几乎处处有 $f(x)=g(x)$. (提示: 对于每一个有理数 r, 令 $E_r=\{x: f(x)<r\}$, 然后利用 §13 定理 2 将 E_r 表为 $F_r\Delta N_r$ 的形状, 其中 F_r 是一个波雷耳集, N_r 是測度为零的集. 設 N 是測度为零的波雷耳集, $N\supset\bigcup_r N_r$, 定义 g 如下:

$$g(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\in N,\\ f(x), & \text{当 } x\in' N.\end{cases}$$

参看 18.2.)

(2) 設 E 是具有正的有限測度的可測集, $\{f_n\}$ 是一个几乎处处有限的可測函数列, 并且它是几乎处处基本的, 則存在正的常数 c, 并存在 E 的可測子集 F, 具有正的測度, 使得对于每一个 $n=1,2,\cdots$, 并对于每一个 $x\in F$, 有 $|f_n(x)|\leqslant c$.

(3) 設 E 是具有 σ-有限測度的可測集, $\{f_n\}$ 是一个几乎处处有限的可

測函数列，并且它在 E 上几乎处处收斂到一个实値可測函数 f，則存在可測集的叙列 $\{E_i\}$ 使得 $\mu(E-\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=0$，并使得 $\{f_n\}$ 在每一个 E_i 上是一致收斂的，$i=1,2,\cdots$.（提示：只須在 $\mu(E)<\infty$ 的場合下証明这个命題．应用叶果洛夫定理，选取 E 使得

$$\mu(E-\bigcup_{i=1}^{n}E_i)<\frac{1}{n}$$

并使得 $\{f_n\}$ 在 E_i 上一致收斂．）

(4) 設 X 是正整数集，$\mathbf{S}$ 是 X 的一切子集所成的类．对于 $E\in\mathbf{S}$，令 $\mu(E)$ 为 E 中之点的个数．如果 χ_n 是集 $\{1,\cdots,n\}$ 的特征函数，則 $\{\chi_n\}$ 处处收斂到 1，但它不是几乎一致基本的．由此可見，如果 E 的測度不是有限的，則叶果洛夫定理不成立．

(5) 对于每一个本性有界函数 f，令 $\|f\|=\text{ess sup}|f|$．設 $\{f_n\}$ 是一个本性有界可測函数列，則 $\{f_n\}$ 几乎处处一致收斂到 f 当而且只当 $\lim_n\|f_n-f\|=0$.

(6) 对于(5)中所述的范数 $\|f\|$ 来說，由一切本性有界可測函数組成的集 $\mathfrak{M}$ 是不是一个巴拿赫空間？

§22. 依測度收斂性

和上节一样，在本节中，我們假定所考慮的是一个固定的測度空間 $(X,\mathbf{S},\mu)$．

定理 1. 設 E 是具有有限測度的集，f 和 f_n 是 E 上的实値可測函数，$n=1,2,\cdots$．对于每一个 $\varepsilon>0$，令

$$E_n(\varepsilon)=\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqq\varepsilon\},\qquad n=1,2,\cdots.$$

$\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收斂到 f 的必要和充分条件是：对于每一个 $\varepsilon>0$,

$$\lim_n\mu(E\cap\bigcup_{m=n}^{\infty}E_m(\varepsilon))=0.$$

証明．根据收斂的定义，实数列 $\{f_n(x)\}$ 不收斂到 $f(x)$ 的必要和充分条件是：存在 $\varepsilon>0$，使得对于 n 的無限多个値有 $x\in E_n(\varepsilon)$．換一句話說，如果 D 是使得 $\{f_n(x)\}$ 不收斂到 $f(x)$ 的点 x 所成的集，則

$$D=\bigcup_{\varepsilon>0}\limsup_n E_n(\varepsilon)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\limsup_n E_n\left(\frac{1}{k}\right).$$

因此，$\mu(E\cap D)=0$（即$\{f_n\}$在E上几乎处处收斂到f）的必要和充分条件是：对于每一个$\varepsilon>0$，$\mu(E\cap\limsup_n E_n(\varepsilon))=0$。由关系式

$$\mu(E\cap\limsup_n E_n(\varepsilon))=\mu(E\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}E_m(\varepsilon))=$$
$$=\lim_n\mu(E\cap\bigcup_{m=n}^{\infty}E_m(\varepsilon))$$

即得定理的結論。▌

为了研究定理1中条件变弱时所产生的結果，現在我們再引进一种很有用的收斂性定义。設$\{f_n\}$是一个几乎处处有限的可测函数列，f是一个可测函数，如果对于每一个$\varepsilon>0$，有$\lim_n\mu(\{x:|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})=0$，则称$\{f_n\}$**依测度收斂到**$f$。按照我們在§21中所作的关于术語的注解，一个几乎处处有限的可测函数列$\{f_n\}$称为**依测度基本**的，如果对于每一个$\varepsilon>0$，当n和$m\to\infty$，有

$$\mu(\{x:|f_n(x)-f_m(x)|\geq\varepsilon\})\to 0.$$

由定理1可知，如果有限值可测函数列在一个具有有限测度的集E上几乎处处收斂到一个有限值極限函数[或几乎处处基本]，则这个函数列在E上是依测度收斂的[或依测度基本]。現在証明下面的定理，其中我們对于集E并不要求它具有有限测度。

定理2. 由几乎一致收斂性可以推出依测度收斂性。

証明. 如果$\{f_n\}$几乎一致收斂到f，则对于任意正数ε和δ，存在可测集F使得$\mu(F)<\delta$，并使得当$x\in F'$而n充分大时有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$。▌

定理3. 如果$\{f_n\}$依测度收斂到f，则$\{f_n\}$是依测度基本的。如果$\{f_n\}$同时也依测度收斂到g，则几乎处处有$f=g$。

証明. 定理的前半部可由关系式

$$\{x:|f_n(x)-f_m(x)|\geq\varepsilon\}\subset$$
$$\subset\left\{x:|f_n(x)-f(x)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cup\left\{x:|f_m(x)-f(x)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

推出。現在証明定理的后半部。我們看出，

$$\{x: |f(x)-g(x)|\geq\varepsilon\}\subset$$

$$\subset\left\{x: |f_n(x)-f(x)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cup\left\{x: |f_n(x)-g(x)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

只要适当地选擇 n，上式右端两个集的測度都可以为任意小，因此，对于每一个 $\varepsilon>0$，我們有

$$\mu(\{x: |f(x)-g(x)|\geq\varepsilon\})=0.$$

由此可見，$f=g$ 几乎处处成立。▌

除了上述比較簡单的性質外，我們再介紹关于依測度收斂性的两个稍为深刻的性質。

定理 4. 如果可測函数列 $\{f_n\}$ 是依測度基本的，則 $\{f_n\}$ 包含一个几乎一致收斂的子叙列 $\{f_{n_k}\}$。

証明。对于任意正整数 k，我們可以找到一个整数 $\bar{n}(k)$ 使当 $n\geq\bar{n}(k)$，$m\geq\bar{n}(k)$，有

$$\mu\left(\left\{x: |f_n(x)-f_m(x)|\geq\frac{1}{2^k}\right\}\right)<\frac{1}{2^k}.$$

令

$$n_1=\bar{n}(1),\ n_2=(n_1+1)\cup\bar{n}(2),\ n_3=(n_2+1)\cup\bar{n}(3),\ \cdots;$$

則 $n_1<n_2<n_3<\cdots$，因此 $\{f_{n_k}\}$ 是 $\{f_n\}$ 的一个無限子叙列。如果

$$E_k=\left\{x: |f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)|\geq\frac{1}{2^k}\right\},$$

并且 $k\leq i\leq j$，則对于每一个 $x\in' E_k\cup E_{k+1}\cup E_{k+2}\cup\cdots$，我們有

$$|f_{n_i}(x)-f_{n_j}(x)|\leq\sum_{m=i}^{\infty}|f_{n_m}(x)-f_{n_{m+1}}(x)|<\frac{1}{2^{i-1}}.$$

因此，$\{f_{n_i}\}$ 在 $X-(E_k\cup E_{k+1}\cup\cdots)$ 上是一致基本的。又因

$$\mu(E_k\cup E_{k+1}\cup\cdots)\leq\sum_{m=k}^{\infty}\mu(E_m)<\frac{1}{2^{k-1}},$$

定理于是証明完畢。

定理 5. 如果可测函数列 $\{f_n\}$ 是依测度基本的，则存在可测函数 f 使得 $\{f_n\}$ 依測度收斂到 f.

証明. 根据定理 4，存在几乎一致基本的子叙列 $\{f_{n_k}\}$，因而 $\{f_{n_k}\}$ 也是几乎处处基本的. 对于每一个使 $\lim_k f_{n_k}(x)$ 存在的 x，令 $f(x)=\lim_k f_{n_k}(x)$. 对于每一个 $\varepsilon>0$，我們有

$$\{x: |f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}\subset$$

$$\subset\left\{x: |f_n(x)-f_{n_k}(x)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cup\left\{x: |f_{n_k}(x)-f(x)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

按照假定，当 n 和 n_k 充分大时，上式右端第一个集的测度可以为任意小；当 $k\to\infty$ 时，第二个集的测度也趋向 0，因为由几乎一致收斂性可以推出依测度收斂性. ▌

(1) 設測度空間 (X, S, μ) 是全有限的，并設有限值可測函数列 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 分别依測度收斂到 f 和 g.

(1a) 如果 α 和 β 是实的常数，則 $\{\alpha f_n+\beta g_n\}$ 依測度收斂到 $\alpha f+\beta g$；$\{|f_n|\}$ 依測度收斂到 $|f|$.

(1b) 如果 $f=0$ 几乎处处成立，則 $\{f_n^2\}$ 依測度收斂到 f^2.

(1c) 函数列 $\{f_n g\}$ 依測度收斂到 fg.（提示：对于給定的正数 δ，存在常数 c 使得 $\mu(X-E)<\delta$，其中 $E=\{x: |g(x)|\leqslant c\}$；在 E 和 $X-E$ 上分别考察 $\{f_n g\}$ 的依測度收斂性.）

(1d) 函数列 $\{f_n^2\}$ 依測度收斂到 f^2.（提示：对 $\{f_n-f\}$ 应用(1b).）

(1e) 函数列 $\{f_n g_n\}$ 依測度收斂到 fg.（提示：用和与平方表出乘积.）

(1f) 如果測度空間不是全有限的，命题(1a)－(1e)是否成立？

(2) 依測度基本叙列的每一个子叙列是依測度基本的.

(3) 設可測函数列 $\{f_n\}$ 是依測度基本的，$\{f_{n_i}\}$ 和 $\{f_{m_j}\}$ 是两个子叙列，$\{f_{n_i}\}$ 几乎处处收斂到極限函数 f，$\{f_{m_j}\}$ 几乎处处收斂到極限函数 g，則几乎处处有 $f=g$.

(4) 設 X 是正整数集，S 是 X 的一切子集所成的类. 对于 $E\in\mathrm{S}$，令 $\mu(E)$ 为 E 中之点的个数. 則对于測度空間 (X, S, μ) 来說，依測度收斂性与处处一致收斂性是等价的.

(5) 在一个測度为無限的集上，由几乎处处收斂性是否可以推出依測度

收斂性？（参看 21.4 和(4)．）

(6) 設測度空間 X 是具有勒貝格測度的单位閉区間．設

$$E_n^i=\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right],\qquad n=1,2,\cdots,\qquad i=1,\cdots,n,$$

并設 χ_n^i 是 E_n^i的特征函数，則叙列 $\{\chi_1^1,\chi_2^1,\chi_2^2,\chi_3^1,\chi_3^2,\chi_3^3,\cdots\}$依測度收斂到 0，但它在 X 中任何点都不是收斂的．

(7) 設 $\{E_n\}$ 是一个可測集叙列，χ_n 是 E_n 的特征函数，$n=1,2,\cdots$．叙列$\{\chi_n\}$为依測度基本的必要和充分条件是：当n和$m\to\infty$时，$\rho(E_n,E_m)\to 0$．（ρ 的定义見 9.4．）

第五章
积　　分

§23. 可积簡单函数

設 $f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}$ 是定义在測度空間 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 上的簡单函数，如果对于使 $\alpha_i\neq 0$ 的每一个指标 i 有 $\mu(E_i)<\infty$，則称 f 是**可积**的。我們称和数[1]

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\mu(E_i)$$

为 f 的**积分**，用記号

$$\int f(x)\,d\,\mu(x) \qquad \text{或} \qquad \int f\,d\mu$$

表示。如果 f 同时也等于 $\sum_{j=1}^{m}\beta_j\,\chi_{F_j}$，則由 μ 的可加性，$\int f\,d\mu=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\,\mu(F_j)$；这就是説，积分的值与 f 的表示方式無关，因而是唯一确定的。我們看出，可积簡单函数的絕对值，任意常数与可积簡单函数的乘积，以及两个可积簡单函数的和都是可积簡单函数。

設 E 是一个可測集，f 是一个可积簡单函数，則很容易看出，函数 $\chi_E f$ 也是一个可积簡单函数；我們定义 **f 在 E 上的积分**如下：

$$\int_E f\,d\mu=\int\chi_E f\,d\mu.$$

---

1) 如果 $\alpha_{i_0}=0$ 而 $\mu(E_{i_0})=\infty$，則按照 §0 中所作的約定，$\alpha_{i_0}\,\mu(E_{i_0})=0$。

可积简单函数最简单的例子就是测度为有限的可測集 E 的特征函数；我們有 $\int \chi_E d\mu = \int_E d\mu = \mu(E)$。

以后我們将在比可积简单函数类更为广泛的函数类上定义可积性与积分的概念。一些有用的定义以及許多重要定理的叙述(但不是証明)，都仅只依賴于我們已經提到的积分学最簡单的性質。为了避免不必要的重复，我們在本节中将"簡单函数"一概簡称为"函数"。这样一来，对于以后我們将要考虑的更为广泛的函数类，本节中所有的定理都将有意义。当然，在本节中，定理的証明都是对簡单函数而言；对于較广泛的函数类，定理的証明将在以后补出。

下述定理 1 和定理 2 我們不加証明；这两个定理都可以直接由定义得出，而在定理 1 的情形，則需要一些十分簡单的計算。

定理 1. 設 f 和 g 是可积函数，α 和 β 是实数，則

$$\int(\alpha f+\beta g)d\mu=\alpha\int f d\mu+\beta\int g\, d\mu.$$

定理 2. 設 f 是几乎处处非負的可积函数，則

$$\int f\, d\mu \geqslant 0.$$

定理 3. 設 f 和 g 是可积函数，并且几乎处处有 $f \geqslant g$，則

$$\int f\, d\mu \geqslant \int g\, d\mu.$$

証明。对 $f-g$ 应用定理 2，并在定理 1 中令 $\alpha=1, \beta=-1$。▌

定理 4. 設 f 和 g 是可积函数，則

$$\int|f+g|\,d\mu \leqslant \int|f|\,d\mu+\int|g|\,d\mu.$$

証明。在定理 3 中，将 f 换为 $|f|+|g|$，g 换为 $|f+g|$。▌

定理 5. 設 f 是可积函数，則

$$\left|\int f\, d\mu\right| \leqslant \int|f|\, d\mu.$$

証明。首先对 $|f|$ 和 f，然后对 $|f|$ 和 $-f$ 应用定理 3。▌

定理 6. 設 f 是可积函数，α 和 β 是实数，E 是一个可测集，并且对于 E 中每一个 x 有 $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$，則

$$\alpha \mu(E) \leqslant \int_E f\,d\mu \leqslant \beta \mu(E).$$

証明。定理中主要的假設条件可以表为 $\alpha\chi_E \leqslant f\chi_E \leqslant \beta\chi_E$，因此在 $\mu(E) < \infty$ 的場合下定理的結論可由定理 3 得出。如果 $\mu(E) = \infty$，可以直接应用可积性的定义。▌

設 f 是一个可积函数，对于每一个可測集 E，令

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu.$$

則集函数 ν 称为 f 的**不定积分**。

定理 7. 設 f 是几乎处处非負的可积函数，則 f 的不定积分是单調的。

証明。如果 E 和 F 是两个可測集并且 $E \subset F$，則几乎处处有 $\chi_E f \leqslant \chi_F f$，利用定理 3 就得到本定理的結論。▌

設 ν 是定义在測度空間 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 中全体可測集类上的有限值集函数。如果对于每一个正数 ε，存在正数 δ，使得对于每一个满足关系式 $\mu(E) < \delta$ 的可測集 E 有 $|\nu(E)| < \varepsilon$，則称 ν **是絕对連續**的。

定理 8. 可积函数的不定积分是絕对連續的。

証明。如果 c 是大于 $|f|$ 的一切值的任意正数，則对于每一个可測集 E，我們有

$$\left| \int_E f\,d\mu \right| \leqslant c\mu(E).$$ ▌

定理 9. 可积函数的不定积分具有可列可加性。

証明。如果 f 是測度为有限的可測集 E 的特征函数，則 f 的不定积分的可列可加性問題就是 μ 在 E 的全体可測子集类上的可列可加性問題。如果 f 是任意的可积簡单函数，則 f 可以表为有限个特征函数的綫性組合，定理于是得証。▌

設f和g是可积函数，我們定义f和g之間的距离$\rho(f,g)$如下：

$$\rho(f,g)=\int|f-g|\,d\mu.$$

"距离"这个名称对于函数ρ来說，除去一个性質以外，在其他各方面都是名符其实的。下面这些性質显然成立：

$$\rho(f,f)=0,\ \ \rho(f,g)=\rho(g,f),\ \ \rho(f,g)\leqslant\rho(f,h)+\rho(h,g).$$

但当$\rho(f,g)=0$时却不一定有$f=g$。例如，当两个可积函数几乎处处相等时，它們之間的距离就可以为零。这种現象我們在下面还要詳細地加以討論。

(1) 如果两个簡单函数中有一个是可积的，則它們的乘积也是可积的。

(2) 設E和F是具有有限測度的可測集，則$\rho(\chi_E,\chi_F)=\mu(E\Delta F)$（参看 9.4 和 22.7）。

(3) 設(X,S,μ)是具有勒貝格測度的单位閉区間。对于X中任意一个固定的点x_0，令$\nu(E)=\chi_E(x_0)$。集函数ν是不是絕对連續的？

(4) 設ν是定义在測度空間(X,S,μ)中全体可測集类上的絕对連續集函数，則对于每一个滿足关系式$\mu(E)=0$的可測集E，有$\nu(E)=0$。

(5) 設X是由有限个点組成的全有限測度空間，則定义在X上的任何实值可測函数是可积簡单函数；对于这种函数来說，积分的一切性質都化为有限和的性質。

§24. 可积簡单函数列

在本节中，我們仍假定所考慮的是一个固定的測度空間(X,S,μ)，并且繼續将"簡单函数"簡称为"函数"。因为在本节中所用的全部方法（只有一个例外，就是定理 4 的証明中最后一部分）都建立在上节的結論上，所以当我們以后轉入一般可积函数的討論时，本节的几个定理，不論是定理本身的叙述或是它們的証明，都保持不变。

設$\{f_n\}$是一个可积函数列，如果当n和$m\to\infty$时，

$$\rho(f_n,f_m)\longrightarrow 0,$$

则称$\{f_n\}$是**平均基本的**.

定理 1. 平均基本的可积函数列$\{f_n\}$是依测度基本的.

証明. 对于任意固定的正数ε, 令

$$E_{nm}=\{x: |f_n(x)-f_m(x)|\geqslant\varepsilon\},$$

则

$$\rho(f_n,f_m)=\int|f_n-f_m|d\mu\geqslant\int_{E_{nm}}|f_n-f_m|d\mu\geqslant\varepsilon\mu(E_{nm}),$$

因此, 当n和$m\to\infty$时, $\mu(E_{nm})\to 0$. ▌

定理 2. 設$\{f_n\}$是平均基本的可积函数列, 并設ν_n是f_n的不定积分, $n=1,2,\cdots$, 则对于每一个可测集E,

$$\nu(E)=\lim_n \nu_n(E)$$

存在, 并且ν是具有可列可加性的有限值集函数.

証明. 当n和$m\to\infty$时,

$$|\nu_n(E)-\nu_m(E)|\leqslant\int|f_n-f_m|d\mu\longrightarrow 0,$$

因此, 極限$\nu(E)$的存在性, 有限性和一致性都是很明显的; 同时也可以看出, ν具有有限可加性. 現在設$\{E_n\}$是不相交可測集的一个叙列, 它的和集是E, 則对于任意一对正整数n和k, 我們有

$$|\nu(E)-\sum_{i=1}^{k}\nu(E_i)|\leqslant|\nu(E)-\nu_n(E)|+$$

$$+|\nu_n(E)-\sum_{i=1}^{k}\nu_n(E_i)|+|\nu_n(\bigcup_{i=1}^{k}E_i)-\nu(\bigcup_{i=1}^{k}E_i)|.$$

当n充分大时, 上式右端第一項和第三項可以为任意小. 对于充分大的固定的n, 当k充分大时, 第二項也可以为任意小. 这就說明了

$$\nu(E)=\lim_k\sum_{i=1}^{k}\nu(E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\nu(E_i). \quad ▌$$

設$\{\nu_n\}$是定义在全体可測集类上的有限值集函数列．如果对于每一个正数ε，存在正数δ，使得对于每一个满足关系式$\mu(E)<\delta$的可測集E并对于每一个正整数n，有$|\nu_n(E)|<\varepsilon$，則称$\{\nu_n\}$的各項是**一致絶对連續的**。

定理 3. 設$\{f_n\}$是平均基本的可积函数列，并設f_n的不定积分是ν_n，$n=1,2,\cdots$，則集函数ν_n是一致絶对連續的。

証明。設$\varepsilon>0$；选取正整数n_0使当$n\geqslant n_0$，$m\geqslant n_0$，有

$$\int |f_n-f_m|\,d\mu<\frac{\varepsilon}{2};$$

并設δ是一个正数使得对于每一个满足关系式$\mu(E)<\delta$的可測集E有

$$\int_E |f_n|\,d\mu<\frac{\varepsilon}{2},\quad n=1,2,\cdots,n_0$$

（参看 §23 定理 8）。如果E是满足关系式$\mu(E)<\delta$的一个可測集并且$n\leqslant n_0$，則

$$|\nu_n(E)|\leqslant\int_E |f_n|\,d\mu<\varepsilon;$$

对于同一个E，如果$n>n_0$，則

$$|\nu_n(E)|\leqslant\int_E |f_n-f_{n_0}|\,d\mu+\int_E |f_{n_0}|\,d\mu<\varepsilon. \quad \blacksquare$$

下面这个定理对于一般的可积函数并不是特別重要的，因此定理的叙述和証明都只限于簡单函数的情形。

定理 4. 設$\{f_n\}$和$\{g_n\}$是两个平均基本的可积簡单函数列，它們依測度收斂到同一个可測函数f。如果ν_n和λ_n分別是f_n和g_n的不定积分，$n=1,2,\cdots$，并且对于每一个可測集E令

$$\nu(E)=\lim_n \nu_n(E),\qquad \lambda(E)=\lim_n \lambda_n(E),$$

則集函数ν与λ恒等。

証明。因为，对于每一个$\varepsilon>0$，

$$E_n=\{x:|f_n(x)-g_n(x)|\geqslant\varepsilon\}\subset$$

$$\subset\left\{x: |f_n(x)-f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x: |f(x)-g_n(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

所以 $\lim_n \mu(E_n)=0$。因此，如果 E 是一个测度为有限的可测集，則在关系式

$$\int_E |f_n-g_n|\,d\mu \leqslant \int_{E-E_n} |f_n-g_n|\,d\mu + \int_{E\cap E_n} |f_n|\,d\mu + \\ +\int_{E\cap E_n} |g_n|\,d\mu$$

中，右端第一項不超过 $\varepsilon\mu(E)$；而根据定理 3 中証明的一致絕对連續性，当 n 充分大时，上式右端的另外两項都可以为任意小。于是

$$\lim_n |\nu_n(E)-\lambda_n(E)|=0,$$

从而 $\nu(E)=\lambda(E)$。又因 ν 和 λ 都具有可列可加性，因此对于每一个具有 σ- 有限测度的可测集 E，我們有 $\nu(E)=\lambda(E)$。

f_n 和 g_n 都是簡单函数，它們之中的每一个是借助于某一个集类而获得定义的：这个集类是具有有限測度的可測集的有限类。如果 E_0 是这些集类中一切集的併集，則 E_0 是一个具有 σ- 有限測度的可測集。因此，对于每一个可測集 E，我們有

$$\nu_n(E-E_0)=\lambda_n(E-E_0)=0,$$

从而有 $\nu(E-E_0)=\lambda(E-E_0)=0$。由此即得 $\nu(E)=\nu(E\cap E_0)$ 和 $\lambda(E)=\lambda(E\cap E_0)$，定理于是得証。 ▌

(1) 全体可积簡单函数所成的集对于距离 ρ 而言是否形成一个完备度量空間？

(2) 沿用定理 2 的記号，如果 $\{E_n\}$ 是不相交可測集的一个叙列，則級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E_n)$ 是絕对收斂的。（提示：这个級数是無条件收斂的。）

§25. 可积函数

設 f 是定义在測度空間 (X, S, μ) 上几乎处处有限的可測函数，如果存在平均基本的可积簡单函数列 $\{f_n\}$，这个函数列依測度收

斂到f,則称f是可积的。我們称

$$\lim_n\int f_n d\mu$$

为f的**积分**,用記号

$$\int f(x)d\mu(x) \qquad 或 \qquad \int f d\mu$$

表示。由 §24 定理 4 (令 $E=\bigcup_n N(f_n)$)可知,f的积分的值是唯一确定的,与定义中$\{f_n\}$的选擇無关。又由 §24 定理 2 可以看出,积分的值总是有限的;这一点是应該特别加以注意的。根据平均基本和依測度收斂的簡单性質,不难驗証,可积函数的絕对值,任意常数与可积函数的乘积,以及两个可积函数的和都是可积函数。关系式

$$f^+=\frac{1}{2}(|f|+f) \qquad 和 \qquad f^-=\frac{1}{2}(|f|-f)$$

說明,如果f是可积的,則f^+和f^-都是可积的。

設E是一个可測集,$\{f_n\}$是一个平均基本的可积簡单函数列,并且$\{f_n\}$依測度收斂到可积函数f,則很容易看出,函数列$\{\chi_E f_n\}$也是平均基本的,并且它依測度收斂到$\chi_E f$。我們定义f **在E上的积分**如下:

$$\int_E f d\mu=\int \chi_E f d\mu.$$

我們曾經提及,§§23 和 24 中諸定理(除去 §24 定理 4 以外)对于一般的可积函数都成立;但我們只在可积簡单函数的情形下証明了这些定理。現在将这些定理的証明补出。

§23 定理 1 和 2 可以直接从極限的簡单性質得出。§23 定理 3 至 7 由 §23 定理 2 推出,它們的証明逐字逐句地保持不变。

下面証明 §23 定理 8 关于不定积分的絕对連續性。設$\{f_n\}$是一个平均基本的可积簡单函数列,并設$\{f_n\}$依測度收斂到可积函数f。对于每一个可測集E,我們有

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \leqslant \left|\int_E f_n\,d\mu\right| + \left|\int_E f_n\,d\mu - \int_E f\,d\mu\right|.$$

因为 f_n 是简单函数，§24 定理 3 中关于一致絕对連續性的結論可以用来說明，当 E 的測度充分小时，上式右端的第一項可以为任意小。由 $\int_E f\,d\mu$ 的定义，当 $n\to\infty$ 时，上式右端第 2 項趋向 0；于是 §23 定理 8 証明完畢。

不定积分的可列可加性的証明更为簡单。沿用上一段的記号，因为 f_n 是簡单函数，所以直接应用 §24 定理 2 就得到 §23 定理 9 的結論。

§24 定理 1 至 3 的証明建立在 §23 中諸定理的結論上，而不依賴于这些結論的証明。因此，对于一般的可积函数，§24 定理 1 至 3 成立。§§23 和 24 中諸定理的証明至此全部完成。

設 $\{f_n\}$ 是一个可积函数列，f 是一个可积函数，如果当 $n\to\infty$ 时，

$$\rho(f_n, f) = \int |f_n - f|\,d\mu \longrightarrow 0,$$

則称 $\{f_n\}$ **平均收斂**到 f。下面是有关这个概念的第一个定理，这个定理本身的叙述以及它的証明都和 §24 定理 1 十分类似。

定理 1. 設可积函数列 $\{f_n\}$ 平均收斂到 f，則 $\{f_n\}$ 依測度收斂到 f。

証明。对于任意固定的正数 ε，令

$$E_n = \{x: |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\},$$

則

$$\int |f_n - f|\,d\mu \geqslant \int_{E_n} |f_n - f|\,d\mu \geqslant \varepsilon\mu(E_n),$$

因此，当 $n\to\infty$ 时，$\mu(E_n)\to 0$。 ▮

定理 2. 設 f 是一个几乎处处非負的可积函数，則 $\int f\,d\mu = 0$ 的必要和充分条件是：$f=0$ 几乎处处成立。

証明。如果 $f=0$ 几乎处处成立，則每項恒等于零的函数列就

是一个平均基本的可积簡单函数列，并且这个函数列依测度收斂到 f；因此，$\int f d\mu=0$。現在証明逆命題。我們看出，如果$\{f_n\}$是一个平均基本的可积简单函数列，并且$\{f_n\}$依测度收斂到 f，则我們可以假定 $f_n\geqslant 0$，因为我們可以将 f_n 換为 $|f_n|$。由假設条件$\int f d\mu=0$ 得到 $\lim_n \int f_n d\mu=0$，这就是說，$\{f_n\}$ 平均收斂到 0。根据定理 1，$\{f_n\}$依测度收斂到 0；因此，由 §22 定理 3，$f=0$ 几乎处处成立。▌

定理 3. 設 f 是一个可积函数，E 是一个测度为零的集，则

$$\int_E f d\mu=0.$$

証明。因为 $\int_E f d\mu=\int \chi_E f d\mu$，又因为具有零测度之集的特征函数几乎处处为零，根据定理 2，$\int_E f d\mu=0$。▌

定理 4. 設 f 是一个可积函数，它在可测集 E 上几乎处处为正，并設 $\int_E f d\mu=0$，则 $\mu(E)=0$。

証明。令 $F_0=\{x:f(x)>0\}$，$F_n=\left\{x:f(x)\geqslant\frac{1}{n}\right\}$，$n=1,2,\cdots$。按照定理的假設条件，$E-F_0$ 是一个测度为零的集，因此只須証明 $E\cap F_0$ 也是一个测度为零的集。因为

$$0=\int_{E\cap F_n} f d\mu\geqslant\frac{1}{n}\mu(E\cap F_n)\geqslant 0,$$

并且

$$F_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n,$$

由关系式

$$\mu(E\cap F_0)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E\cap F_n)$$

即得定理的結論。▌

定理 5. 設 f 是一个可积函数，如果对于每一个可测集 F 有 $\int_F f d\mu=0$，则几乎处处有 $f=0$。

証明。令 $E=\{x:f(x)>0\}$，則由定理的假設条件，$\int_E f d\mu=0$；

因此，根据定理 4，E 是一个测度为零的集. 对于函数 $-f$ 进行同样的討論，就可以說明，$\{x:f(x)<0\}$ 也是一个测度为零的集. ▌

定理 6. 設 f 是一个可积函数，則集 $N(f)=\{x:f(x)\neq 0\}$ 具有 σ- 有限测度。

証明. 設 $\{f_n\}$ 是一个平均基本的可积简单函数列，并且这个函数列依测度收斂到 f. 对于每一个 $n=1, 2, \cdots$, $N(f_n)$ 是具有有限测度的可测集. 令

$$E=N(f)-\bigcup_{n=1}^{\infty}N(f_n),$$

并設 F 是 E 的任意可测子集，則由关系式

$$\int_F f\,d\mu=\lim_n\int_F f_n\,d\mu=0$$

和定理 5 可知，在 E 上几乎处处有 $f=0$. 根据 $N(f)$ 的定义，在 E 上 $f\neq 0$，因此 $\mu(E)=0$. 由关系式

$$N(f)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}N(f_n)\cup E$$

即得定理的結論. ▌

有的时候对于某种不可积的函数 f 采用記号 $\int f\,d\mu$ 是很有用的. 例如，若 f 是一个广义实值可测函数使得 $f\geqslant 0$ 几乎处处成立，并且 f 是不可积的，則我們可以定义

$$\int f\,d\mu=\infty.$$

宜于采用記号 $\int f\,d\mu$ 的最一般的函数类，就是由全体具有下列性質的广义实值可测函数 f 組成的类：函数 f^+ 和 f^- 中至少有一个是可积的. 在这种情形下我們定义

$$\int f\,d\mu=\int f^+\,d\mu-\int f^-\,d\mu.$$

因为 $\int f^+\,d\mu$ 和 $\int f^-\,d\mu$ 二数中最多只有一个为無限，所以 $\int f\,d\mu$ 的值只可能是 $+\infty$, $-\infty$, 或有限的实数，而不会出現沒有意义的不定式 $\infty-\infty$. 今后我們将用到这种广义的积分概念，但是“可积函数”这个术語仍然保持它原来的意义。

(1) 設 X 是由全体正整数組成的空間（例如，在 22.4 中所述的），則定义在 X 上的函数 f 为可积函数的必要和充分条件是：級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 絕对收斂。如果滿足这个条件，則 $\int f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

(2) 設 f 是一个非負的可积函数，則它的不定积分是定义在全体可測集类上的一个有限測度。

(3) 設 f 是一个可积函数，則对于每一个正数 ε，

$$\mu(\{x: |f(x)| \geqq \varepsilon\}) < \infty.$$

(4) 設 g 是单实变数的連續有限增函数，$\overline{\mu}_g$ 是由 g 引出的勒貝格-史蒂尔杰測度（参看 15.9），并設 f 是对于这个測度为可积的函数，則积分 $\int f(x) d\overline{\mu}_g(x)$ 称为 f 对于 g 的**勒貝格-史蒂尔杰积分**，記为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dg(x)$. 特別，如果 $g(x) \equiv x$，我們就得到**勒貝格积分**，記为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$. 如果 $f(x)$ 是一个連續函数使得 $N(f)$ 为有界集，則 f 是勒貝格可积函数.

§26. 可积函数列

定理 1. 設平均基本的可积簡单函数列 $\{f_n\}$ 依測度收斂到可积函数 f，則当 $n \to \infty$ 时，

$$\rho(f, f_n) = \int |f - f_n|\, d\mu \longrightarrow 0.$$

由此可見，对于每一个可积函数 f 并对于每一个正数 ε，存在一个可积簡单函数 g 使得 $\rho(f, g) < \varepsilon$.

証明。对于任意固定的正整数 m，$\{|f_n - f_m|\}$ 是一个平均基本的可积簡单函数列，并且它依測度收斂到 $|f - f_m|$. 因此

$$\int |f - f_m|\, d\mu = \lim_n \int |f_n - f_m|\, d\mu.$$

由函数列 $\{f_n\}$ 的平均基本性就得到定理的結論。 ▌

定理 2. 設 $\{f_n\}$ 是平均基本的可积函数列，則存在可积函数 f 使当 $n \to \infty$ 时有 $\rho(f_n, f) \to 0$（从而有 $\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu$）.

証明．根据定理 1，对于每一个正整数 n，存在一个可积簡单函数 g_n 使得 $\rho(f_n, g_n)<\frac{1}{n}$．因此，可积簡单函数列$\{g_n\}$是平均基本的．設$\{g_n\}$依測度收斂到一个可測（因而也是可积的）函数 f．我們有

$$0\leqslant\left|\int f_n d\mu-\int f\,d\mu\right|\leqslant\int|f_n-f|\,d\mu=\rho(f_n,f)\leqslant$$
$$\leqslant\rho(f_n,g_n)+\rho(g_n,f),$$

由定理 1 即得本定理的結論． ▌

为了将下面的定理用較为簡潔和直观的形式表述出来，首先我們回忆一下在 §9 中引进的集函数的上連續性概念．設 ν 是定义在集类 $\mathbf{E}$ 上的有限值集函数，如果对于 $\mathbf{E}$ 中之集的每一个减叙列$\{E_n\}$有 $\lim_n \nu(E_n)=0$，其中 $\lim_n E_n=0$，則称 ν 在 0 是上連續的．現在設$\{\nu_n\}$是定义在 $\mathbf{E}$ 上的有限值集函数叙列，如果对于 $\mathbf{E}$ 中之集的每一个减叙列$\{E_n\}$，其中 $\lim_n E_n=0$，并对于每一个正数 ε，存在正整数 m_0 使当 $m\geqslant m_0$ 有$|\nu_n(E_m)|<\varepsilon$，$n=1, 2, \cdots$，則称$\{\nu_n\}$的各項在 0 是从上**同等連續**的．

定理 3. 可积函数列$\{f_n\}$平均收斂到可积函数 f 的必要和充分条件是：$\{f_n\}$依測度收斂到 f，$|f_n|$ $(n=1,2,\cdots)$的不定积分一致絶对連續并在 0 是从上同等連續的．

証明．首先証明条件的必要性．因为$\{f_n\}$的依測度收斂性和不定积分的一致絶对連續性已分別在 §25 定理 1 和 §24 定理 3 中得出，所以只須証明不定积分的同等連續性．

$\{f_n\}$的平均收斂性說明：对于每一个正数 ε，存在正整数 n_0 使当 $n\geqslant n_0$ 有

$$\int|f_n-f|\,d\mu<\frac{\varepsilon}{2}.$$

根据 §23 定理 9，非負可积函数的不定积分是一个有限的測度，由 §9 定理 5 可知，这个不定积分在 0 是上連續的．設$\{E_m\}$是可測集

的减叙列，具有空的交集，則存在正整数 m_0 使当 $m \geqslant m_0$ 有

$$\int_{E_m} |f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

和

$$\int_{E_m} |f_n - f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad n = 1, \cdots, n_0.$$

由此可見，如果 $m \geqslant m_0$，則对于每一个正整数 n，我們有

$$\int_{E_m} |f_n| d\mu \leqslant \int_{E_m} |f_n - f| d\mu + \int_{E_m} |f| d\mu < \varepsilon;$$

这就是我們要証明的同等連續性。

現在証明条件的充分性。因为可列个具有 σ- 有限測度的可測集的併集是具有 σ- 有限測度的可測集，根据 §25 定理 6,

$$E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: f_n(x) \neq 0\}$$

就是一个具有 σ- 有限測度的可測集。設 $\{E_n\}$ 是具有有限測度的可測集增叙列，$\lim_n E_n = E_0$，并設 $F_n = E_0 - E_n$，$n = 1, 2, \cdots$，則 $\{F_n\}$ 是一个减叙列并且 $\lim_n F_n = 0$。按照同等連續性的假設，对于每一个正数 δ，存在正整数 k 使得

$$\int_{F_k} |f_n| d\mu < \frac{\delta}{2},$$

从而有

$$\int_{F_k} |f_m - f_n| d\mu \leqslant \int_{F_k} |f_m| d\mu + \int_{F_k} |f_n| d\mu < \delta.$$

如果对于任意固定的 $\varepsilon > 0$，令

$$G_{mn} = \{x: |f_m(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon\},$$

則

$$\int_{E_k} |f_m - f_n| d\mu \leqslant \int_{E_k - G_{mn}} |f_m - f_n| d\mu + \int_{E_k \cap G_{mn}} |f_m - f_n| d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \mu(E_k) + \int_{E_k \supset G_{mn}} |f_m - f_n| d\mu.$$

根据 $\{f_n\}$ 的依測度收斂性和不定积分的一致絕对連續性的假設，

当 m 和 n 充分大时，上式最右端的第二项可以为任意小，因此

$$\limsup_{m,n}\int_{E_k}|f_m-f_n|\,d\mu\leqslant\varepsilon\mu(E_k).$$

因为 ε 是任意的，于是有

$$\lim_{m,n}\int_{E_k}|f_m-f_n|\,d\mu=0.$$

由关系式

$$\int|f_m-f_n|\,d\mu=\int_{E_0}|f_m-f_n|\,d\mu=$$

$$=\int_{E_k}|f_m-f_n|\,d\mu+\int_{F_k}|f_m-f_n|\,d\mu$$

可以看出，

$$\limsup_{m,n}\int|f_m-f_n|\,d\mu<\delta,$$

而 δ 是任意的，所以

$$\lim_{m,n}\int|f_m-f_n|\,d\mu=0.$$

換一句話說，我們已經証明了$\{f_n\}$是平均基本的；根据定理 2，存在可积函数 g 使得$\{f_n\}$平均收斂到 g。又因为由平均收斂性可以推出依測度收斂性，所以几乎处处有 $f=g$。 ▌

下面这个定理称为勒貝格的有界收斂定理。

定理 4. 設可积函数列 $\{f_n\}$ 依測度收斂到 f [或几乎处处收斂到 f]，并設 g 是一个可积函数使得 $|f_n(x)|\leqslant|g(x)|$ 几乎处处成立，$n=1,2,\cdots$，則函数 f 是可积的，并且函数列$\{f_n\}$平均收斂到 f。

証明。在$\{f_n\}$依測度收斂到 f 的場合下，这个定理是定理 3 的直接推論，因为由不等式

$$\int_E|f_n|\,d\mu\leqslant\int_E|g|\,d\mu$$

可以看出，定理 3 中所要求的关于不定积分的全部条件都是滿足的。

$\{f_n\}$几乎处处收斂的場合，利用g的存在性，可以化为依測度收斂的場合（甚至于积分可以取在一个測度为無限的集上，参看22.4和22.5）. 事实上，不丧失普遍性，我们可以假定，对于每一个$x\in X$，不等式$|f_n(x)|\leqslant|g(x)|$和$|f(x)|\leqslant|g(x)|$成立。于是，对于每一个固定的正数ε，我們有

$$E_n=\bigcup_{i=n}^{\infty}\{x:|f_i(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}\subset\left\{x:|g(x)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

从而有$\mu(E_n)<\infty$, $n=1, 2, \cdots$。按照几乎处处收斂的假設，$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n)=0$；根据 §9 定理 5，我們得到

$$\limsup_n \mu(\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})\leqslant$$
$$\leqslant\lim_n \mu(E_n)=\mu(\lim_n E_n)=0.$$

換一句話說，局限于一个可积函数并且几乎处处收斂的可积函数列是依測度收斂的，这就証明了我們的定理。 ▌

(1) 对于范数$\|f\|=\int|f|\,d\mu$而言，由一切可积函数組成的集是否形成一个巴拿赫空間？

(2) 設一致基本的函数列$\{f_n\}$在一个測度为有限的可測集E上是可积的，則由等式$f(x)=\lim_n f_n(x)$确定的函数f在E上是可积的，并且当$n\to\infty$时$\int_E|f_n-f|\,d\mu\to0$.

(3) 如果測度空間$(X, \mathbf{S}, \mu)$是有限的，則在定理3中将不定积分同等連續性的条件除去，定理仍成立.

(4) 設$(X, \mathbf{S}, \mu)$是在22.4中所述的全体正整数組成的空間.

(4a) 令

$$f_n(k)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & 若 1\leqslant k\leqslant n,\\ 0, & 若 k>n.\end{cases}$$

函数列$\{f_n\}$可以用来說明：在定理3中，不定积分同等連續性的条件一般說来是不能除去的.

(4b) 上面这个例子也可以用来說明：如果$\{f_n\}$是一个一致收斂的可积函数列，并且它的極限函数f也是可积的，我們不一定有$\lim_n\int f_n\,d\mu=$

$=\int f\,d\mu$(参看(2)).

(4c) 令

$$f_n(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{k}, & 若 1\leqslant k\leqslant n,\\ 0, & 若 k>n.\end{cases}$$

函数列$\{f_n\}$可以用来說明：可积函数列如果是一致收斂的，它的極限函数不一定是可积的.

(5) 設X是具有勒貝格測度的单位閉区間，$\{E_n\}$是开区間的一个減敘列使得$\mu(E_n)=\dfrac{1}{n}$, $n=1,2,\cdots$. 函数列$\{n\chi_{E_n}\}$可以用来說明：在定理4中，有界的条件一般說来是不能除去的.

(6) 設可积函数列$\{f_n\}$平均收斂到可积函数f，并設g是一个本性有界的可測函数，則函数列$\{f_ng\}$平均收斂到fg.

(7) 設非負的可积函数列$\{f_n\}$几乎处处收斂到一个可积函数f，并設

$$\int f_n d\mu=\int f\,d\mu,\quad n=1,2,\cdots,$$

則$\{f_n\}$平均收斂到f. (提示：令$g_n=f_n-f$，則由不等式$|f_n-f|\leqslant f_n+f$不难看出，$0\leqslant g_n^-\leqslant f$. 对函数列$\{g_n^-\}$应用有界收斂定理，由关系式

$$\int g_n^+ d\mu-\int g_n^- d\mu=0,\quad n=1,2,\cdots$$

即得命題的結論.)

§27. 积分的性質

定理 1. 設f是一个可測函数，g是一个可积函数，并且几乎处处有$|f|\leqslant|g|$，則f是可积的.

証明. 分别考慮f的正部和負部，我們只須对非負的函数f証明本定理. 如果f是簡单函数，定理显然成立. 在一般的場合下，对于X中一切的x，存在非負簡单函数的增敘列$\{f_n\}$使得$\lim_n f_n(x)=f(x)$. 因为$0\leqslant f_n\leqslant|g|$，所以每一个$f_n$是可积的，应用有界收斂定理就得到本定理的結論. ▌

定理 2. 設$\{f_n\}$是非負广义实值可測函数的增敘列，并且

$\lim_n f_n(x)=f(x)$ 几乎处处成立，則

$$\lim_n \int f_n d\mu=\int f d\mu.$$

証明．如果 f 是可积的，則結論可由有界收斂定理和定理 1 得出．因此，剩下的只是要在 f 是不可积的場合下証明这个定理；我們需要証明的就是：当 $\int f d\mu=\infty$ 时必有 $\lim_n\int f_n d\mu=\infty$；也就是說，如果 $\lim_n\int f_n d\mu<\infty$，則 f 一定是可积的．由于極限是有限的，因此

$$\lim_{m,n}\left|\int f_m d\mu-\int f_n d\mu\right|=0.$$

因为对于任意固定的 m 和 n，函数 f_m-f_n 不变号，于是有

$$\left|\int f_m d\mu-\int f_n d\mu\right|=\int|f_m-f_n|d\mu;$$

由此可見，函数列 $\{f_n\}$ 是平均基本的．根据 §26 定理 2，$\{f_n\}$ 平均收斂到一个可积函数 g．又因为平均收斂的函数列是依測度收斂的，因而存在一个几乎处处收斂到 g 的子叙列，所以 $f=g$ 几乎处处成立．▌

定理 3. 可測函数 f 为可积的必要和充分条件是：$|f|$ 是可积的．

証明．这个定理中需要証明的部分是：若 $|f|$ 是可积的，則 f 也是可积的．在定理 1 中将 g 换为 $|f|$，就証明了这个事实．▌

定理 4. 設 f 是一个可积函数，g 是一个本性有界的可測函数，則 fg 是可积的．

証明．設 $|g|\leqslant c$ 几乎处处成立，則 $|fg|\leqslant c|f|$ 几乎处处成立，由定理 3 即得本定理的結論．▌

定理 5. 設 f 是一个本性有界的可測函数，并且 E 是一个具有有限測度的可測集，則 f 在 E 上是可积的．

証明．因为測度为有限的可測集的特征函数是可积函数，在定理 4 中将 f 和 g 分别换为 χ_E 和 f，就得到本定理的結論．

下面这个定理称为**法都辅助定理**。

定理 6. 設$\{f_n\}$是一个非負可积函数列使得

$$\liminf_n \int f_n d\mu < \infty,$$

則由等式

$$f(x) = \liminf_n f_n(x)$$

确定的函数f是可积的，并且

$$\int f d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n d\mu.$$

証明. 令$g_n(x) = \inf\{f_i(x): n \leqslant i < \infty\}$，則$g_n \leqslant f_n$，并且函数列$\{g_n\}$是遞增的. 由于

$$\int g_n d\mu \leqslant \int f_n d\mu,$$

我們有

$$\lim_n \int g_n d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n d\mu < \infty.$$

又因为$\lim_n g_n(x) = \liminf_n f_n(x) = f(x)$，由定理 2 可知，$f$是可积的，并且

$$\int f\, d\mu = \lim_n \int g_n\, d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n d\mu \quad . \blacksquare$$

(1) 設f是一个可测函数，g是一个可积函数，α和β是两个实数使得$\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$几乎处处成立，則存在实数$\gamma$，$\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$，使得

$$\int f|g|\, d\mu = \gamma \int |g|\, d\mu.$$

(提示:

$$\alpha \int |g|\, d\mu \leqslant \int f|g|\, d\mu \leqslant \beta \int |g|\, d\mu.)$$

这个結果称为积分的**中值定理**.

(2) 設$\{f_n\}$是一个可积函数列使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n|\, d\mu < \infty,$$

則級数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$几乎处处收斂到一个可积函数$f$，并且

$$\int f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n d\mu.$$

（提示：对于級数$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$的部分和所成的函数列应用定理2，并利用下述事实：收斂性是絕对收斂性的必要条件.）

(3) 設f和f_n是可积函数，$n=1,2,\cdots$，并且$|f_n(x)|\leqslant|f(x)|$几乎处处成立，則由等式

$$f^*(x)=\lim\sup_n f_n(x) \qquad 和 \qquad f_*(x)=\lim\inf_n f_n(x)$$

确定的函数f^*和f_*都是可积的，并且

$$\int f^*d\mu\geqslant\lim\sup_n\int f_n d\mu\geqslant\lim\inf_n\int f_n d\mu\geqslant\int f_* d\mu.$$

（提示：分別考慮f_n的正部和負部，首先将一般的場合化为f_n为非負的場合；然后对$\{f+f_n\}$和$\{f-f_n\}$应用法都輔助定理.）

(4) 要使得可測函数f在一个測度为有限的可測集E上是可积的，必須而且只須級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E\cap\{x:\ |f(x)|\geqslant n\})$$

收斂.（提示：应用阿倍尔的求部分和的方法.）如果$\mu(E)=\infty$或在上式中从$n=0$开始取和数，我們可以得到甚么結論？

(5) 設$\{E_n\}$是一个可測集叙列，m是任意固定的正整数，并設G是由一切具有下列性質的点x組成的集：至少有m个E_n包含x. 則G是一个可測集，并且

$$m\,\mu(G)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n).$$

（提示：考慮$\sum_{n=1}^{\infty}\int_G \chi_{E_n}(x)\,d\mu(x)$.）

(6) 設f是定义在全有限測度空間$(X,\mathbf{S},\mu)$上的有限值可測函数，并令

$$S_n=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k}{2^n}\mu\left(\left\{x:\frac{k}{2^n}<f(x)\leqslant\frac{k+1}{2^n}\right\}\right), n=1,2,\cdots.$$

則等式

$$\int f\,d\mu=\lim_n S_n$$

按照下述意义成立：如果f是可积的，则每一个級数S_n是絕对收斂的，極限存在，并且極限値等于积分值；反之，如果級数S_n中的任意一个是絕对收斂的，則其他的都是絕对收斂的，$\lim_n S_n$存在，f是可积的，并且上列等式成立.（提示：只須在$f\geqslant 0$的場合下証明这个命題．令

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{k}{2^n}, & \text{若}\frac{k}{2^n}<f(x)\leqslant\frac{k+1}{2^n}, \qquad k=0,1,2,\cdots;\\ 0, & \text{若} f(x)=0,\end{cases}$$

然后应用定理2．反面的命題可以証明如下：由关系式

$$f(x)\leqslant 2f_n(x)+\mu(X)$$

可以看出，f是可积的，因而可以应用上面所述的命題.）

(7) 下面所述是接近积分概念的另一种常用的方式．設f是定义在測度空間$(X, \mathbf{S}, \mu)$上的非負可积函数．对于每一个可測集E，令

$$a(E)=\inf\{f(x): x\in E\};$$

并对于不相交可測集的每一个有限类$\mathbf{C}=\{E_1,\cdots,E_n\}$，令

$$s(\mathbf{C})=\sum_{i=1}^{n}a(E_i)\mu(E_i).$$

我們断言：一切形如$s(\mathbf{C})$之数的上确界就是$\int f\,d\mu$．事实上，如果f是簡单函数，則結論显然成立．在一般的場合，如果f不一定是一个簡单函数，設g是一个非負簡单函数使得$g\leqslant f$．令$g=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}$，并令$\mathbf{C}=\{E_1,\cdots,E_n\}$，則

$$\int g\,d\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}a(E_i)\mu(E_i)=s(\mathbf{C}).$$

由此可見，如果$\{g_n\}$是非負簡单函数的一个增叙列，并且这个叙列收斂到f，則有

$$\lim_n \int g_n \, d\mu \leqslant \sup s(C),$$

从而有

$$\int f \, d\mu \leqslant \sup s(C).$$

另一方面，因为 $s(C)$ 是某一个具有上述性質的簡单函数 g 的积分，所以对于每一个 C，我們有

$$s(C) \leqslant \int f \, d\mu.$$

(7a) 在(7)中所得到的結果能不能推广到不可积非負函数的場合？

(7b) 設 f 是定义在全有限測度空間 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 上的可积函数，并設它的分布函数 g 是連續的(参看 18.11)，則

$$\int f \, d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dg(x);$$

(参看 25.4)。(提示：假定 $f \geqslant 0$。考慮上式中两个积分的“积分和” $s(C)$ 并利用(7)。)

第六章

一般的集函数

§28. 广义测度

在本章中，我們将研究一种不很复杂但很有用的广义测度概念；以前引进的测度和我們現在要討論的集函数之間的主要区别，就在于后者不限定是非負的。

設 S 是由集 X 的子集組成的一个 σ-环，μ_1 和 μ_2 是定义在 S 上的两个测度。如果对于 S 中每一个集 E，令 $\mu(E)=\mu_1(E)+\mu_2(E)$，則显然 μ 是一个测度；同时可以看出，对于有限个测度之和的場合，这个結論也成立。此外，将一个测度乘以任意非負的常数，也可以获得新的测度。結合上述两种方法，我們得到下面的結論：如果$\{\mu_1, \cdots, \mu_n\}$是有限个测度的集，$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$是非負实数的有限集，則定义在 S 上由等式

$$\mu(E)=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i(E)$$

确定的集函数 μ 是一个测度。

如果我們允許系数 α_i 可以是負数，則情况就大不相同了。例如，設 μ_1 和 μ_2 是 S 上的两个测度，如果令 $\mu(E)=\mu_1(E)-\mu_2(E)$，我們就会碰見两个新的問題。第一，对于某些集，μ 可能取負的值；事实上，这不但不是一个严重的問題，并且还是一个值得研究的有趣的現象。第二，对于某些集 E，可能發生 $\mu_1(E)=\mu_2(E)=\infty$，这时 $\mu(E)$沒有意义；在我們开始研究以前，这是首先需要加以解决

的一个問題。

为了避免不定形的出現，我們規定，只有当两个測度中至少有一个是有限測度时，这两个測度才能相减。这种規定和我們以前对某种不可积函数采用記号 $\int f\,d\mu$ 的情形十分相似(我們記得，对于一个可測函数 f，$\int f\,d\mu$ 有定义当而且只当函数 f^+ 和 f^- 二者中至少有一个是可积函数时；也就是說，当而且只当由等式

$$\nu^+(E)=\int_E f^+\,d\mu \qquad 和 \qquad \nu^-(E)=\int_E f^-\,d\mu$$

确定的两个集函数 ν^+ 和 ν^- 中至少有一个是有限測度时)。我們还可以进一步發現它們的类似之点：如果 f 是一个可測函数使得 $\int f\,d\mu$ 有定义，則由等式

$$\nu(E)=\int_E f\,d\mu$$

确定的集函数 ν 是两个測度之差。

上述論点已經充分地說明了下面的定义。設 μ 是定义在可測空間$(X, \mathbf{S})$中全体可測集类上的广义实値集函数，具有可列可加性，$\mu(0)=0$，并且 μ 在 $+\infty$ 和 $-\infty$ 二值中至多只能取得一个值，則称 μ 为**广义測度**。

我們注意到，广义測度 μ 的可列可加性条件隐含着下面的性質：对于任何不相交可測集叙列$\{E_n\}$，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$$

的和总具有确定的意义，也就是說，級数或者是收斂的，或者發散到 $+\infty$ 或 $-\infty$。

关于測度的术語，“[全]有限”和“[全]σ-有限”，可以同样用之于广义測度，但在定义中必須将 $\mu(E)$ 换为 $|\mu(E)|$，也就是說，将 $\mu(E)<\infty$ 换为 $-\infty<\mu(E)<+\infty$。例如，广义測度 μ 称为全有限的，如果 X 可測并且 $|\mu(X)|<\infty$。

在以下的討論中，我們将要証明，每一个广义測度可以表为两

个测度之差。如果这个結論能够获得証明，我們就可以首先在一个环上定义广义测度的概念，然后試圖将它扩張，正如同測度的扩張一样；但是我們立刻就会發現，这不过是浪費时間而已，因为每一个广义測度的扩張問題可以化为通常測度的扩張問題。

如同在測度的場合一样，由广义測度的定义可知，广义測度具有有限可加性，因而也具有可减性。

定理 1. 設 μ 是一个广义測度，E 和 F 是两个可測集使得

$$E\subset F \quad 和 \quad |\mu(F)|<\infty,$$

則 $|\mu(E)|<\infty$。

証明。我們有

$$\mu(F)=\mu(F-E)+\mu(E).$$

上式右端中如果恰好有一項为無限，則 $\mu(F)$ 也为無限；如果两項均为無限，則因 μ 在 $+\infty$ 和 $-\infty$ 二值中至多只能取得一个值，所以或者是 $\mu(F-E)=\mu(E)=\infty$，或者是 $\mu(F-E)=\mu(E)=-\infty$，因此 $\mu(F)$ 仍为無限。由此可見，上式右端两項都是有限的；这就說明了：如果一个集具有有限的广义測度，則它的每一个可測子集都具有有限的广义測度。▌

定理 2. 設 μ 是一个广义測度，$\{E_n\}$ 是一个不相交可測集叙列使得 $|\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)|<\infty$，則級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$ 絶对收斂。

証明。令

$$E_n^+=\begin{cases}E_n, & 若\ \mu(E_n)\geqslant 0,\\ 0, & 若\ \mu(E_n)<0,\end{cases}$$

$$E_n^-=\begin{cases}E_n, & 若\ \mu(E_n)\leqslant 0,\\ 0, & 若\ \mu(E_n)>0.\end{cases}$$

則有

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n^+)$$

和

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^-\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n^-).$$

考慮上面二式右端的两个級数。由于每一个級数的各項都保持相同的符号，并且μ在$+\infty$和$-\infty$二值中至多只能取得一个值，因此这两个級数中至少有一个是收斂的。但是这两个級数的和是收斂級数$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$，因而两个級数都是收斂的。又因为上列正項級数和負項級数的收斂性無异于$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$的絕对收斂性，定理于是証明完畢。▌

定理 3. 設μ是一个广义测度，$\{E_n\}$是可测集的一个单調叙列，在$\{E_n\}$是遞減的場合并設至少有n的一个值能使$|\mu(E_n)|<\infty$，則

$$\mu(\lim_n E_n)=\lim_n \mu(E_n).$$

証明。在$\{E_n\}$是遞增的情形，定理的証明和§9 定理 4 的証明相同(将$\{E_n\}$換为不相交的集叙列$\{E_i-E_{i-1}\}$)；在$\{E_n\}$是遞減的情形，可以利用余集的运算化为遞增的情形（参看 §9 定理 5)，但此时必須应用定理 1 說明，在証明的过程中出現的减式是有限的。▌

(1) 两个[全]σ-有限測度之和是[全]σ-有限測度．这个命题对于無限項和的場合是否成立?

(2) 对于可測空間中每一个可測集E，定义$\mu(E)=\mu_1(E)+i\,\mu_2(E)$，其中$i=\sqrt{-1}$，$\mu_1$和$\mu_2$是在本节所述意义下的两个广义測度，則称$\mu$是定义在全体可測集类上的一个**复測度**．定理 1 至 3 对于复測度是否成立?

(3) 如果广义測度μ可以按照两种方式表为两个測度之差：

$$\mu=\mu_1-\mu_2,\qquad \mu=\nu_1-\nu_2,$$

則是否一定有$\mu_1=\nu_1$和$\mu_2=\nu_2$?

(4) 广义測度在$+\infty$和$-\infty$二值中至多只能取得一个值，这个性質可以

从可列可加性的条件推出．(提示：假定 $\mu(E)=\infty$, $\mu(F)=-\infty$．考虑关系式

$$\mu(E)=\mu(E-F)+\mu(E\cap F),$$
$$\mu(F)=\mu(F-E)+\mu(E\cap F)$$

和

$$\mu(E\Delta F)=\mu(E-F)+\mu(F-E);$$

这三个等式的右端至少有一个是不定形.)

§29. 哈恩分解和若当分解

設 μ 是定义在可測空間 $(X,\mathbf{S})$ 中全体可測集类上的广义测度，并設 E 是一个集．如果对于每一个可測集 F，$E\cap F$ 可測并且 $\mu(E\cap F)\geqslant 0$，則称 E(对于 μ)是一个**正集**；类似地，如果对于每一个可測集 F，$E\cap F$ 可測并且 $\mu(E\cap F)\leqslant 0$，則称 E(对于 μ)是一个**負集**．按照这种意义，空集是正集同时也是負集；除此而外，我們不再肯定任何其他正集或負集一定存在．

定理 1. 設 μ 是一个广义测度，則存在不相交的两个集 A 和 B，使得 $A\cup B=X$，并使得 A 对于 μ 为正集，B 对于 μ 为負集．

我們称集 A 和 B 形成 X 对于 μ 的一个**哈恩分解**．

証明．因为 μ 在 $+\infty$ 和 $-\infty$ 二值中至多只能取得一个值，所以我們可以假定，对于任何可測集 E．

$$-\infty<\mu(E)\leqslant+\infty.$$

两个負集的差集以及可列个不相交負集的併集显然都是負集，因此負集的任何可列併仍为負集．对于一切可測負集 B，令 $\beta=\inf\mu(B)$．設 $\{B_i\}$ 是可測負集的一个叙列使得 $\lim_i \mu(B_i)=\beta$；如果 $B=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$，則 B 是一个可測負集使得 $\mu(B)$ 为最小．

現在我們証明 $A=X-B$ 是一个正集．假定結論不成立，設 E_0 是 A 的一个可測子集使得 $\mu(E_0)<0$．首先我們看出，E_0 不可能是負集；因为如果 E_0 是一个負集，則 $B\cup E_0$ 也将是一个負集并

且 $\mu(B\cup E_0)<\mu(B)$，而这是不可能的。設 k_1 是滿足关系 $\mu(E_1)\geqslant\frac{1}{k_1}$ 的最小正整数，其中 E_1 是 E_0 的可測子集（我們注意到，因为 $\mu(E_0)<0$，所以 $\mu(E_0)$ 和 $\mu(E_1)$ 都是有限的）。因为

$$\mu(E_0-E_1)=\mu(E_0)-\mu(E_1)\leqslant\mu(E_0)-\frac{1}{k_1}<0,$$

剛才用于 E_0 的論証也可以同样用之于 E_0-E_1。設 k_2 是滿足关系 $\mu(E_2)\geqslant\frac{1}{k_2}$ 的最小正整数，其中 E_2 是 E_0-E_1 的可測子集；依此类推，以至無穷。由于 E_0 的可測子集具有有限的 μ 值（§28 定理 1），我們有

$$\lim_n\frac{1}{k_n}=0.$$

由此可見，如果 F 是

$$F_0=E_0-\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$$

的任意可測子集，則 $\mu(F)\leqslant 0$，也就是說，F_0 是一个可測負集。但是 F_0 和 B 不相交，并且

$$\mu(F_0)=\mu(E_0)-\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_j)\leqslant\mu(E_0)<0,$$

这和 B 的最小性質相矛盾，因此 $\mu(E_0)<0$ 的假定不能成立。 ▎

不难构造一个例子来說明哈恩分解**并非**唯一的。不过，如果

$$X=A_1\cup B_1 \qquad 和 \qquad X=A_2\cup B_2$$

是 X 的两个哈恩分解，則我們可以証明，对于每一个可測集 E，有

$$\mu(E\cap A_1)=\mu(E\cap A_2) \qquad 和 \qquad \mu(E\cap B_1)=\mu(E\cap B_2).$$

事实上，由关系式

$$E\cap(A_1-A_2)\subset E\cap A_1$$

可知，$\mu(E\cap(A_1-A_2))\geqslant 0$；又由关系式

$$E\cap(A_1-A_2)\subset E\cap B_2$$

可知，$\mu(E\cap(A_1-A_2))\leqslant 0$。因此，$\mu(E\cap(A_1-A_2))=0$，同理可証 $\mu(E\cap(A_2-A_1))=0$；由此可見

$$\mu(E\cap A_1)=\mu(E\cap(A_1\cup A_2))=\mu(E\cap A_2).$$

根据上述结果可知，在全体可测集类上，等式

$$\mu^+(E)=\mu(E\cap A) \quad 和 \quad \mu^-(E)=-\mu(E\cap B)$$

唯一地确定了两个集函数 μ^+ 和 μ^-，分别称为 μ 的**上变差**和**下变差**。对于每一个可测集 E，令

$$|\mu|(E)=\mu^+(E)+\mu^-(E),$$

則集函数 $|\mu|$ 称为 μ 的**全变差**。（注意記号 $|\mu|(E)$ 和 $|\mu(E)|$ 之間的重要区别。）

定理 2. *广义测度 μ 的上变差 μ^+、下变差 μ^- 和全变差 $|\mu|$ 都是测度，并且对于每一个可测集 E，有 $\mu(E)=\mu^+(E)-\mu^-(E)$。如果 μ 是[全]有限或 σ-有限的，則 μ^+ 和 μ^- 也是[全]有限或 σ-有限的；μ^+ 和 μ^- 二者中至少有一个是有限测度。*

証明。μ 的变差显然都是非負的；如果每一个可测集可以表为可列个具有有限 μ 值的可测集之併，則根据 §28 定理 1，μ^+ 和 μ^- 也滿足同样的条件。等式 $\mu=\mu^+-\mu^-$ 可由 μ^+ 和 μ^- 的定义直接推出；因为 μ 在 $+\infty$ 和 $-\infty$ 二值中至多只能取得一个值，由此可見集函数 μ^+ 和 μ^- 二者中至少有一个恒为有限。μ^+ 和 μ^- 显然具有可列可加性，定理于是証明完畢。▌

定理 2 說明了每一个广义测度可以表为两个测度（其中至少有一个是有限的）之差；将 μ 表为它的上变差与下变差之差，这种表示的方式称为 μ 的**若当分解**。

(1) 設 μ 是一个有限广义测度，$\{E_n\}$ 是一个可测集叙列，并且 $\lim_n E_n$ 存在（也就是 $\limsup_n E_n=\liminf_n E_n$），則

$$\mu(\lim_n E_n)=\lim_n \mu(E_n).$$

(2) 有限广义测度以及它的变差都是有界的。为了这个理由，我們常称有限广义测度是**有界变差**的。

(3) 設 μ 是一个广义测度，E 是一个可测集，則有

$$\mu^+(E)=\sup\{\mu(F):E\supset F\in \mathbf{S}\}$$

和

$$\mu^-(E) = -\inf\{\mu(F): E\supset F\in \mathbf{S}\}.$$

如果将上面两个等式当作 μ^+ 和 μ^- 的定义，我們可以得到若当分解定理另一种常用的証法.

(4) 对于范数 $\|\mu\| = |\mu|(X)$ 而言，由定义在某个 σ-代数上的一切全有限广义測度組成的集是否形成一个巴拿赫空間?

(5) 設$(X, \mathbf{S}, \mu)$是一个測度空間，f是定义在X上的一个可积函数，則由等式

$$\nu(E) = \int_E f(x)d\mu(x)$$

确定的集函数 ν 是一个有限广义測度，并且

$$\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu, \qquad \nu^-(E) = \int_E f^- d\mu.$$

如何以 f 表出 $|\nu|(E)$?

(6) 設 μ 和 ν 是定义在 σ-代数 $\mathbf{S}$ 上的两个全有限測度，E 是 $\mathbf{S}$ 中的一个集，則对于每一个实数 t，存在 $\mathbf{S}$ 中的集 A_t 使得 $A_t\subset E$，并滿足下述条件：对于 $\mathbf{S}$ 中适合关系 $F\subset A_t$[或 $F\subset E-A_t$]的每一个集 F，有 $\nu(F)\leqslant t\,\mu(F)$ [或 $\nu(F)\geqslant t\,\mu(F)$].

(7) 設 μ 是一个广义測度，f是一个可測函数，并且f对于 $|\mu|$ 是可积的，則由定义可令

$$\int f\,d\mu = \int f\,d\mu^+ - \int f\,d\mu^-.$$

这个积分具有在第五章中討論的"正"积分的許多主要性質. 如果 μ 是一个有限广义測度，則对于每一个可測集 E，有

$$|\mu|(E) = \sup\left|\int_E f d\mu\right|,$$

其中 sup 指的是对滿足关系 $|f|\leqslant 1$ 的一切可測函数 f 取上确界.

(8) 对于复值函数 f 和复測度 μ (参看 28.2)，也可以定义积分 $\int f\,d\mu$，只須分别考虑实部和虚部. 按照(7)，我們定义有限复測度 μ 的全变差为

$$|\mu|(E) = \sup\left|\int_E f\,d\mu\right|,$$

其中 sup 指的是对滿足关系 $|f|\leqslant 1$ 的一切可測函数 f (可能是复值的) 取上确界. μ 的实部和虚部的全变差与 $|\mu|$ 有甚么关系?

§30. 絕对連續性

前面我們考虑了不定积分的性質，从而引进了广义測度的抽象概念，并且指出了它具有不定积分的一些重要性質。然而不定积分还有一些性質（或者說，不定积分与借以定义的測度之間的某些关系）是一般的广义測度所沒有的。其中之一就是具有高度重要意义的絕对連續性（§23）；現在我們进而說明，在更为一般的場合下，絕对連續性仍然有其意义。

設$(X, \mathbf{S})$是一个可測空間，μ和ν是$\mathbf{S}$上的广义測度，如果对于滿足关系式$|\mu|(E)=0$的每一个可測集E，有$\nu(E)=0$，则称ν对于μ是絕对連續的，記为$\nu\ll\mu$。用不精确但比較直观的話来說，$\nu\ll\mu$的意义就是：当μ很小时ν也很小。我們注意到，在上述精确的定义中，表达的方式不是对称的；μ很小乃是由关于它的全变差的条件表达出来的。下面的定理說明这只是表面的現象。

定理 1. 設μ和ν是广义測度，則条件

(a)　　$\nu\ll\mu$,

(b)　　$\nu^+\ll\mu,\qquad \nu^-\ll\mu$,

(c)　　$|\nu|\ll|\mu|$

是互相等价的。

証明。設(a)成立，則当$|\mu|(E)=0$有$\nu(E)=0$。令$X=A\cup B$为X对于ν的一个哈恩分解，則当$|\mu|(E)=0$有

$$0\leqslant|\mu|(E\cap A)\leqslant|\mu|(E)=0$$

和

$$0\leqslant|\mu|(E\cap B)\leqslant|\mu|(E)=0,$$

因此有

$$\nu^+(E)=\nu(E\cap A)=0$$

和

$$\nu^-(E)=\nu(E\cap B)=0;$$

于是(b)成立。

由关系式

$$|\nu|(E)=\nu^{+}(E)+\nu^{-}(E)$$

可以說明,(c)是(b)的結論;又由关系式

$$0\leqslant|\nu(E)|\leqslant|\nu|(E)$$

可以說明,(a)是(c)的結論。 ∎

下面的定理說明了我們現在的絕对連續性定义与 §23 中引进的定义（对于有限值集函数）之間的关系。这个定理实質上肯定了,对于"当 μ 很小时 ν 也很小"这样的說法,可以給出另外一种精确的解釋,这种解釋虽然在外表上与原来的不同,但与它等价。

定理 2. 設 ν 是一个有限广义测度,μ 是一个广义测度, 并且 $\nu\ll\mu$, 則对于每一个正数 ε, 存在正数 δ, 使得对于滿足关系式 $|\mu|(E)<\delta$ 的每一个可测集 E, 有 $|\nu|(E)<\varepsilon$。

証明。假定結論不成立。設对于某一个 $\varepsilon>0$, 存在可測集叙列 $\{E_n\}$ 使得 $|\mu|(E_n)<\frac{1}{2^n}$ 并且 $|\nu|(E_n)\geqslant\varepsilon$, $n=1,2,\cdots$。 令 $E=\limsup_n E_n$, 則

$$|\mu|(E)\leqslant\sum_{i=n}^{\infty}|\mu|(E_i)<\frac{1}{2^{n-1}},\qquad n=1,2,\cdots,$$

因而有 $|\mu|(E)=0$。另一方面,由于 ν 是有限的,我們有

$$|\nu|(E)=\lim_n|\nu|(E_n\cup E_{n+1}\cup\cdots)\geqslant\limsup_n|\nu|(E_n)\geqslant\varepsilon.$$

这个結果与假設条件 $\nu\ll\mu$ 相抵触,定理于是証明完畢。 ∎

容易驗証,关系"$\ll$"具有自反性(即 $\mu\ll\mu$) 和推移性（即若 $\mu_1\ll\mu_2$, $\mu_2\ll\mu_3$, 則 $\mu_1\ll\mu_3$)。設 μ 和 ν 是两个广义测度, 如果同时有 $\nu\ll\mu$ 和 $\mu\ll\nu$,則称 μ 和 ν 是等价的,記为 $\mu\equiv\nu$。

現在我們引进奇异性关系, 它是和絕对連續性相对立的一种关系。設 $(X, \mathbf{S})$ 是一个可測空間, μ 和 ν 是定义在 $\mathbf{S}$ 上的广义測度, 如果存在不相交的两个集 A 和 B, 使得 $A\cup B=X$, 并使得对于每一个可測集 E, $A\cap E$ 和 $B\cap E$ 都为可測集并且 $|\mu|(A\cap E)=$

$=|\nu|(B\cap E)=0$,則称 μ 和 ν 是**互相奇异的**,或者就說,μ 和 ν 是**奇异的**,記为 $\mu\perp\nu$。虽然在定义里 μ 和 ν 所占的地位是对称的,但我們有时却用不对称的表达方式"ν 对于 μ 是奇异的" 来代替"μ 和 ν 是奇异的"。

很明显,奇异性乃是非絕对連續性的一个極端的形式。如果 ν 对于 μ 是奇异的,則不但由 $|\mu|(E)=0$ 不能推出 $|\nu|(E)=0$,而且实質上只有对于 $|\mu|$ 为 0 的集,$|\nu|$ 才有可能不为 0。

最后,我們再介紹一种新的記号。我們在測度空間上已經引用"几乎处处"这个具有直观性的傳統的术語;在每次只限于考虑一个測度时,这个术語是完全可以令人滿意的。然而,在絕对連續性和奇异性的討論中,我們必須同时考虑不止一个測度;而时常說到"几乎处处对于 μ" 則过于累贅,因此我們将采用下述的簡便記号。設 $(X, \mathbf{S})$ 是一个可測空間,μ 是定义在 $\mathbf{S}$ 上的一个广义測度;对于 $(X, \mathbf{S})$ 中每一个点 x, $\pi(x)$ 表示有关 x 的一个命題。我們用記号

$$\pi(x)[\mu] \qquad \text{或} \qquad \pi[\mu]$$

表示:如果 E 是由使 $\pi(x)$ 不成立的一切点 x 組成的集,則 $|\mu|(E)=$ $=0$. 例如,令 f 和 g 为定义在 X 上的两个函数,則記号 $f=g[\mu]$ 表示:对于 $|\mu|$ 而言,$\{x: f(x)\neq g(x)\}$ 是一个測度为零的可測集。

(1) 設 μ 是一个广义測度,f 是对于 $|\mu|$ 为可积的一个函数. 对于每一个可測集 E,定义

$$\nu(E)=\int_E f\,d\mu$$

(参看 29.7),則 $\nu\ll\mu$.

(2) 設測度空間 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 是具有勒貝格測度的单位区間. 令 $F=\{x: 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\}$,并定义函数 f_1, f_2 如下:

$$f_1(x)=2\chi_F(x)-1, \qquad f_2(x)=x.$$

如果集函数 μ_i 由等式

$$\mu_i(E)=\int_E f_i\,d\mu, \qquad i=1,2$$

确定，则 $\mu_2 \ll \mu_1$. 但当 $\mu_1(E)=0$ 时却不一定有 $\mu_2(E)=0$. 如果 μ_2 由等式

$$\mu_2(E)=\int_E\left(f_2-\frac{1}{2}\right)d\mu$$

确定，则当 $\mu_1(E)=0$ 时必有 $\mu_2(E)=0$.

(3) 設 μ 是一个广义测度，则变差 μ^+ 和 μ^- 是互相奇异的，并且它們之中的每一个对于 μ 是絕对連續的.

(4) 設 μ 是一个广义测度，则 $\mu \equiv |\mu|$.

(5) 設 μ 是一个广义测度，E 是一个可測集，则 $|\mu|(E)=0$ 的必要和充分条件是：对于 E 的每一个可测子集 F，$\mu(F)=0$.

(6) 設 μ 和 ν 是定义在 σ-环 $\mathbf{S}$ 上的两个测度，则 $\nu \ll \mu+\nu$.

(7) 設 f_1 和 f_2 是定义在全有限测度空間 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 上的两个可积函数，μ_i 是 f_i 的不定积分，$i=1, 2$. 如果

$$\mu(\{x: f_1(x)=0\}\Delta\{x: f_2(x)=0\})=0,$$

则 $\mu_1 \equiv \mu_2$.

(8) 設 ψ 是在 19.3 中定义的康脱函数，μ_0 是定义在单位区間的全体波雷耳子集类上由 ψ 引出的勒貝格-史蒂尔杰测度（参看 15.9）. 如果 μ 是勒貝格测度，则 μ_0 和 μ 是互相奇异的.

(9) 設 μ 和 ν 是两个广义测度，并且 ν 对于 μ 既是絕对連續的又是奇异的，则 $\nu=0$.

(10) 設 ν_1, ν_2 和 μ 都是有限广义测度，并且 ν_1 和 ν_2 对于 μ 都是奇异的，则 $\nu=\nu_1+\nu_2$ 对于 μ 也是奇异的.（提示：令 $X=A_1\cup B_1$ 和 $X=A_2\cup B_2$ 是满足下述性質的两个分解：对于 A_i 的可测子集，$|\mu|$ 恒等于零；对于 B_i 的可测子集，$|\nu_i|$ 恒等于零，$i=1,2$. 则

$$X=[(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap B_2)\cup(A_2\cap B_1)]\cup(B_1\cap B_2)$$

就是使得 $\mu\perp\nu$ 的一个分解.）

(11) 設 μ 和 ν 是定义在 σ-代数 $\mathbf{S}$ 上的两个测度，μ 是有限的，并且 $\nu\ll\mu$，则存在可测集 E，使得 $X-E$ 对于 ν 而言具有 σ-有限测度，并使得对于 E 的任何可测子集 F，$\nu(F)$ 或为 0 或为 ∞.（提示：利用穷举法（参看 17.3），可以找出一个可测集 E，使得对于 E 的任何可测子集 F，$\nu(F)$ 或为 0 或为 ∞，并使得 $\mu(E)$ 为最大. 然后再应用穷举法說明 $X-E$ 对于 ν 而言具

有 σ-有限测度.)

(12) 在定理2中，如果 ν 不是有限的，则定理不一定成立.（提示：令 X 为全体正整数集；对于 X 的每一个子集 E，令

$$\mu(E)=\sum_{n\in E}2^{-n},\qquad \nu(E)=\sum_{n\in E}2^{n}.)$$

§31. 拉东-尼古丁定理

定理 1. 設 μ 和 ν 是兩个全有限测度，$\nu\ll\mu$，并且 ν 不恒为零，則存在正数 ε 和可测集 A，使得 $\mu(A)>0$，并使得 A 对于广义测度 $\nu-\varepsilon\mu$ 为正集.

証明. 設 $X=A_n\cup B_n$ 是 X 对于广义测度 $\nu-\frac{1}{n}\mu$ 的哈恩分解，$n=1,2,\cdots$，并令

$$A_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\qquad B_0=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n.$$

由于 $B_0\subset B_n$ 我們有

$$0\leqslant\nu(B_0)\leqslant\frac{1}{n}\mu(B_0),\qquad n=1,2,\cdots,$$

从而有 $\nu(B_0)=0$. 因此 $\nu(A_0)>0$，根据絕对連續性的假設条件就有 $\mu(A_0)>0$. 由此可見，至少对于 n 的一个值有 $\mu(A_n)>0$；对于这个 n 值，令 $A=A_n$ 和 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，即得定理的結論. ▎

在下面这个定理（称为**拉东-尼古丁定理**）中建立了有关絕对連續性的基本結論.

定理 2. 設 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 是全 σ-有限测度空間，ν 是定义在 $\mathbf{S}$ 上的 σ-有限广义测度，并且 ν 对于 μ 是絕对連續的，則存在 X 上的有限值可测函数 f 使得对于每一个可测集 E 有

$$\nu(E)=\int_E f\,d\mu.$$

函数 f 在下述意义下是唯一确定的：如果同时有 $\nu(E)=\int_E g\,d\mu$，$E\in\mathbf{S}$，則 $f=g[\mu]$.

我們特別指出，在定理中并沒有肯定f是可积的。不难看出，f为可积的必要和充分条件是：ν为有限。然而，記号$\int f\,d\mu$的引用隐含着（参看§25）下述事实：f的正部f^+和負部f^-中至少有一个是可积的；如果f^+是可积的，則ν的上变差ν^+是有限的，如果f^-是可积的，則下变差ν^-是有限的。

証明。由于X可以表为可列个具有有限μ和ν值的不相交可測集的併，我們首先可以假定μ和ν都是有限的，而不致丧失普遍性（对于存在性和唯一性的証明，都可以这样假定）。如果ν是有限的，則f是可积的，应用§25定理5即得唯一性的証明。最后，由于假設条件$\nu\ll\mu$与条件

$$\nu^+\ll\mu,\qquad \nu^-\ll\mu$$

是等价的，因此剩下的只是要在μ和ν都是有限測度的場合下証明f的存在性。

設$\mathfrak{K}$是由具有下述性質的全体非負函数f組成的类：f对于μ是可积的，并且对于每一个可測集E有$\int_E f\,d\mu\leqslant\nu(E)$。令

$$\alpha=\sup\left\{\int f\,d\mu:\ f\in\mathfrak{K}\right\},$$

并設$\{f_n\}$是$\mathfrak{K}$中函数的一个叙列使得

$$\lim_n\int f_n\,d\mu=\alpha.$$

如果E是任意固定的可測集，n是任意固定的正整数，并且$g_n=f_1\cup\cdots\cup f_n$，則$E$可以表为$n$个不相交可測集的併集，$E=E_1\cup\cdots\cup E_n$，使得$g_n(x)=f_j(x)$，$x\in E_j$，$j=1,\cdots,n$。于是我們有

$$\int_E g_n d\mu=\sum_{j=1}^n\int_{E_j}f_j d\mu\leqslant\sum_{j=1}^n\nu(E_j)=\nu(E).$$

若令$f_0(x)=\sup\{f_n(x):n=1,\ 2,\cdots\}$，則$f_0(x)=\lim_n g_n(x)$。由§27定理2可知，$f_0\in\mathfrak{K}$并且$\int f_0\,d\mu=\alpha$。因为$f_0$是可积的，所以存在有限值函数$f$使得$f_0=f[\mu]$；以下我們証明，若$\nu_0(E)=\nu(E)-$

$\int_E f\,d\mu$，則測度 ν_0 恒等于零。

假定 ν_0 不恒为零，則根据定理 1，存在正数 ε 和可測集 A，使得 $\mu(A)>0$，并使得对于每一个可測集 E 有

$$\varepsilon\mu(E\cap A)\leqslant\nu_0(E\cap A)=\nu(E\cap A)-\int_{E\cap A}f\,d\mu.$$

令 $g=f+\varepsilon\chi_A$，則对于每一个可測集 E 有

$$\int_E g\,d\mu=\int_E f\,d\mu+\varepsilon\mu(E\cap A)\leqslant\int_{E-A}f\,d\mu+\nu(E\cap A)\leqslant\nu(E),$$

因此 $g\in\mathfrak{K}$。但因

$$\int g\,d\mu=\int f\,d\mu+\varepsilon\mu(A)>\alpha,$$

这与 α 的定义相矛盾，定理于是得証。▌

(1) 設 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 是一个测度空間，对于每一个可測集 E，令

$$\nu(E)=\int_E f\,d\mu,$$

則

$$X=\{x:f(x)>0\}\cup\{x:f(x)\leqslant 0\}$$

是 X 对于 ν 的一个哈恩分解。

(2a) 設 $(X,\mathbf{S})$ 是一个可測空間，μ 和 ν 是 $\mathbf{S}$ 上的全有限測度，且 $\nu\ll\mu$。令 $\bar{\mu}=\mu+\nu$；若对于每一个可測集 E，$\nu(E)=\int_E f\,d\bar{\mu}$，則 $0\leqslant f(x)<1[\mu]$。

(2b) 若对于每一个非負可測函数 g 有 $\int g\,d\nu=\int fg\,d\bar{\mu}$，則对于每一个可測集 E 有 $\nu(E)=\int_E\frac{f}{1-f}d\mu$。(提示：将假設条件改写为

$$\int g(1-f)\,d\nu=\int fg\,d\mu.$$

对于每一个 E，令

$$g=\frac{\chi_E}{1-f}.)$$

(3) 設測度空間 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 是具有勒貝格測度的单位区間，M 是一个不可測集。設 (α_1,β_1) 和 (α_2,β_2) 是两个正的实数对使得 $\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2=1$，$\tilde{\mathbf{S}}$ 是由 $\mathbf{S}$ 与 M 組成的类产生的 σ-环；并設 $\tilde{\mu}_i$ 是由 (α_i,β_i) 所确定的 μ 在

$\tilde{\mathbf{S}}$ 上的扩張，$i=1,2$（参看 16.2）．則存在可测函数 f_1 和 f_2 使得对于每一个可测集 E 有

$$\tilde{\mu}_1(E)=\int_E f_1 d\tilde{\mu}_2 \text{ 和 } \tilde{\mu}_2(E)=\int_E f_2 d\tilde{\mu}_1.$$

f_1 和 f_2 是怎样的函数？

(4) 在 μ 为广义测度的場合下，拉东-尼古丁定理仍成立．（提示：令 $X=A\cup B$ 为 X 对于 μ 的一个哈恩分解．在 A 中对于 ν 和 μ^+ 并在 B 中对于 ν 和 μ^- 分別应用拉东-尼古丁定理．）

(5) 設 μ 是全 σ-有限的广义测度．因为 μ^+ 和 μ^- 对于 μ 和 $|\mu|$ 都是絕对連續的，我們有

$$\mu^+(E)=\int_E f_+ d\mu=\int_E g_+ d|\mu| \quad \text{和} \quad \mu^-(E)=\int_E f_- d\mu=\int_E g_- d|\mu|.$$

函数 f_+，g_+，f_- 和 g_- 滿足关系式 $f_+=g_+[\mu]$ 和 $f_-=g_-[\mu]$．它們是怎样的函数？

(6) 設 μ 是广义测度，如果对于每一个可测集 E 有

$$\nu(E)=\int_E f\, d\mu \quad \text{和} \quad |\nu|(E)=\int_E g\, d|\mu|,$$

則 $g=|f|\ [\mu]$．

(7) 即使在 ν 不是 σ-有限的場合下，拉东-尼古丁定理仍然成立；但在这种情形下被积函数不一定是有限值的．（提示：只須在 ν 是一个测度而 μ 为有限的場合下証明这个命題；应用 30.11．）

(8) 如果 μ 不是全 σ-有限的，則即使 ν 为有限，拉东-尼古丁定理也不一定成立．（提示：設 X 是一个不可列集，$\mathbf{S}$ 是由全体可列子集以及具有可列余集的子集組成的类．对于 $\mathbf{S}$ 中每一个 E，令 $\mu(E)$ 为 E 中之点的数目；并按照 E 为可列或不可列而令 $\nu(E)$ 等于 0 或 1．）

(9) 設 $(X, \mathbf{S})$ 是一个可测空間，μ 和 ν 是 $\mathbf{S}$ 上的 σ-有限测度，并且 $\nu \ll \mu$，則拉东-尼古丁定理可以分別地应用到每一个可测集上．可能会發生这样的問題：是否可以在 X 上定义一个适当的函数 f，使得 f 对于一切可测集可以同时作为被积函数？下面的例子說明，一般講来这是不可能的．

設 A 是任意不可列集，它的势是 α，B 是以 β 为势的一个集，$\beta>\alpha$．設 X 是由一切有序数对 (a, b) 組成的集，其中 $a\in A, b\in B$．我們称形如 $\{(a, b_0): a\in A\}$ 的集为**水平直綫**，形如 $\{(a_0, b): b\in B\}$ 的集为**垂直直綫**．設 $\mathbf{S}$ 是

由一切具有下述性質的集 E 組成的类：E 能被可列个水平和垂直直綫 L 所遮盖，而对于每一个这样的 L，或者 $L\cap E$ 是可列的，或者 $L-E$ 是可列的(参看 12.1)．对于 $\mathbf{S}$ 中每一个 E，令 $\mu(E)$为使 $L-E$ 为可列的水平和垂直直綫 L 的数目，$\nu(E)$为使 $L-E$ 为可列的垂直直綫 L 的数目．显然，μ 和 ν 都是 σ-有限測度，并且 $\nu\ll\mu$．現在假定存在 X 上的一个函数 f 使得对于 $\mathbf{S}$ 中每一个 E 有 $\nu(E)=\int_E f\,d\mu$．不难看出，集 $\{x: f(x)=0\}$ 在每一个垂直直綫上必須为可列；而对于每一个水平直綫 $L, L-\{x: f(x)=0\}$ 必須为可列．前者說明集$\{x: f(x)=0\}$的势不大于 $\alpha\aleph_0=\alpha$，而后者則說明这个集的势不小于 $\beta(\alpha-\aleph_0)\geqslant\beta$．

(10) 在拉东-尼古丁定理中，加之于測度空間的条件，可以换成一个較全 σ-有限为弱，而較 σ-有限为强的条件，定理仍然能够成立．这个条件可以叙述如下．空間可以表为具有有限測度不相交可測集类 $\mathbf{D}$ 的併集，并使得每一个可測集在精确到一个測度为零的集的程度內能被 $\mathbf{D}$ 中可列个集所遮盖．下面是滿足这个条件但并非全 σ-有限的測度空間的一个例子．

令 X 为欧氏平面，$\mathbf{S}$ 是由一切具有下述性質的集 E 組成的类：E 能被可列条水平直綫所遮盖， 并且 E 在每一条这样的水平直綫上是勒貝格可測的．如果 E 是一条水平直綫的勒貝格可測子集，定义 $\mu(E)$ 等于 E 的勒貝格測度；对于 $\mathbf{S}$ 中一般的 E，μ 的値可以根据可列可加性而唯一地确定．

(11)在(9)中如果 $B=A$，并且这个集的势是 $\aleph_1$ (=最小不可列势)，則上面的証明不能用．事实上，在这种情形下，存在 X 的子集 E，E 在每一个垂直直綫上是可列的，而对于每一个水平直綫 $L, L-E$ 是可列的．(提示：将 A 作成正序集，即对于 A 中每一个 a，以一个序数 $\xi(a)<\Omega$ (=最小不可列序数) 与之对应．于是在 A 的全体点与小于 Ω 的全体序数之間建立了一个一一对应关系．令 $E=\{(a,b):\xi(a)<\xi(b)\}$.)

(12) 設 μ 是一个全有限測度，对于每一个可測集E，令 $\nu(E)=\int_E f\,d\mu$，則集

$$B(t)=\{x: f(x)\leqslant t\}$$

对于广义測度 $\nu-t\mu$ 为負集 (参看 (1))．利用集 $B(t)$ 重建函数 f (参看 18.10)，据此可以得到拉东-尼古丁定理的另一种証明方式．在这种証明的方式里，主要的困难在于負集并非唯一的． 对于每一个 t， 选擇 $B(t)$ 使 $\mu(B(t))$ 为極大，这样可以局部地解决这个困难．

§32. 广义测度的导数

在拉东-尼古丁定理中出現的被积函数，常以一个富有啓示意味的特别記号来表示。設 μ 是一个全 σ-有限測度，如果对于每一个可測集 E, $\nu(E)=\int_E f\,d\mu$, 則記为

$$f=\frac{d\nu}{d\mu} \quad \text{或} \quad d\nu=f\,d\mu.$$

拉东-尼古丁被积函数 f 也可以叫做拉东-尼古丁导数。由微分記号的运算在形式上得出的 f 的全部性質，都可以表为精确的定理而获得証明。有些性質是很显然的，例如

$$\frac{d(\nu_1+\nu_2)}{d\mu}=\frac{d\nu_1}{d\mu}+\frac{d\nu_2}{d\mu},$$

而有些則是积分的較深性質。下面我們将精确地叙述并証明复合函数的微分法則，以及由此导出的积分号下的代換法則。当然，我們必須記住，拉东-尼古丁导数 $\frac{d\nu}{d\mu}$ 仅仅在"几乎处处对于 μ"的意义下是唯一确定的；因此，要用文字詳細地表达一个微分公式，就不得不时常用到"几乎处处"的字样。

定理 1. 設 λ 和 μ 是全 σ-有限測度，$\mu\ll\lambda$, 并設 ν 是全 σ-有限广义測度，$\nu\ll\mu$, 則

$$\frac{d\nu}{d\lambda}=\frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}[\lambda].$$

証明。如果上式对于 ν 的上变差和下变差都成立，則上式对于 ν 也成立；因此我們只須在 ν 是一个測度的場合下証明这个定理。为了記号的簡便起見，令

$$\frac{d\nu}{d\mu}=f,\ \frac{d\mu}{d\lambda}=g.$$

由于 ν 是非負的，根据 §25 定理 4 就有 $f\geqslant 0\,[\mu]$。不丧失普遍性，可以假定 f 是处处非負的。

設$\{f_n\}$是非負簡单函数的一个增叙列，它在X中每一点处收斂到f（§20 定理2）。根据§27 定理2，对于每一个可測集E，我們有

$$\lim_n \int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu \quad \text{和} \quad \lim_n \int_E f_n g\, d\lambda = \int_E fg\, d\lambda.$$

但对于每一个可測集F，有

$$\int_E \chi_F\, d\mu = \mu(E \cap F) = \int_{E\cap F} g\, d\lambda = \int_E \chi_F g\, d\lambda,$$

于是

$$\int_E f_n\, d\mu = \int_E f_n g\, d\lambda, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

因此

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu = \int_E fg\, d\lambda. \quad \blacksquare$$

定理 2. 設λ和μ是全σ-有限測度，$\mu \ll \lambda$，并設f是使得$\int f\, d\mu$有定义的有限値可測函数，則

$$\int f\, d\mu = \int f \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda.$$

証明. 对于每一个可測集E，令

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu,$$

然后应用定理1. 于是，对于每一个可測集E，有

$$\nu(E) = \int_E f \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda;$$

令$E = X$，即得定理的結論. ▌

下面是有关广义測度之間的关系的最后一条定理. 它說明了一个全σ-有限广义測度ν可以分解为两部分，其中一部分对于另外一个全σ-有限广义測度μ是絕对連續的，而另一部分对于μ是奇异的. 这种分解称为**勒貝格分解**.

定理 3. 設$(X, \mathbf{S})$是可測空間，μ和ν是$\mathbf{S}$上的全σ-有限广

义测度，則存在唯一确定的兩个全 σ-有限广义测度 ν_0 和 ν_1，使得 $\nu=\nu_0+\nu_1$，并使得 $\nu_0\perp\mu, \nu_1\ll\mu$。

証明。和以前一样，我們可以假定 μ 和 ν 都是有限的。如果 ν_i $(i=0,1)$ 对于 $|\mu|$ 是絕对連續或奇异的，則它对于 μ 也是絕对連續或奇异的，因此我們可以假定 μ 是一个測度。又因为我們可以分別地对待 ν^+ 和 ν^-，因此又可以假定 ν 也是一个測度。

对于全有限的測度，这个定理的証明方式是一种很有用的技巧。定理的証明建立在下述簡单的事实上：ν 对于 $\mu+\nu$ 是絕对連續的。根据这个事实可知，存在可測函数 f，使得对于每一个可測集 E，有

$$\nu(E)=\int_E f\,d\mu+\int_E f\,d\nu.$$

因为 $0\leqslant\nu(E)\leqslant\mu(E)+\nu(E)$，我們有 $0\leqslant f\leqslant 1[\mu+\nu]$，从而有 $0\leqslant f\leqslant 1[\nu]$。令 $A=\{x: f(x)=1\}, B=\{x: 0\leqslant f(x)<1\}$，則

$$\nu(A)=\int_A d\mu+\int_A d\nu=\mu(A)+\nu(A),$$

由于 ν 是有限的，所以 $\mu(A)=0$。对于每一个可測集 E，令

$$\nu_0(E)=\nu(E\cap A) \qquad \text{和} \qquad \nu_1(E)=\nu(E\cap B),$$

則显然有 $\nu_0\perp\mu$。剩下需要証明的是 $\nu_1\ll\mu$。

設 $\mu(E)=0$，則

$$\int_{E\cap B} d\nu=\nu(E\cap B)=\int_{E\cap B} f\,d\nu,$$

于是

$$\int_{E\cap B}(1-f)\,d\nu=0.$$

由于 $1-f\geqslant 0[\nu]$，因此 $\nu_1(E)=\nu(E\cap B)=0$；这就証明了 ν_0 和 ν_1 的存在性。

如果 $\nu=\nu_0+\nu_1$ 和 $\nu=\bar{\nu}_0+\bar{\nu}_1$ 是 ν 的两个勒貝格分解，則 $\nu_0-\bar{\nu}_0=\bar{\nu}_1-\nu_1$。因为 $\nu_0-\bar{\nu}_0$ 对于 μ 是奇异的（参看 30.10），而 $\bar{\nu}_1-\nu_1$ 对

于 μ 是絕对連續的，由此有 $\nu_0=\bar{\nu}_0$ 和 $\nu_1=\bar{\nu}_1$（参看 30.9）. ▎

(1) 利用对于广义测度积分的概念，拉东-尼古丁导数的定义可以推广到 μ 为广义测度的情形．在这种情形下，如果 λ 和 μ 是广义测度，定理 1 仍成立．（提示：考虑 X 对于广义测度 λ, μ, ν 的三个哈恩分解．在这三个分解里各取一个集，作成这三个集的交集，于是将 X 分解为八个集．在这八个集的任意一个的可测子集上，集函数 λ, μ 和 ν 三者都保持不变号；因此，可以直接应用定理 1.）

(2) 設 μ 和 ν 是全 σ-有限广义测度，$\mu\equiv\nu$，則

$$\frac{d\mu}{d\nu}=1\Big/\frac{d\nu}{d\mu}.$$

(3) 設 μ 和 ν 是全 σ-有限广义测度，$\nu\ll\mu$，則

$$\nu\left(\left\{x:\frac{d\nu}{d\mu}(x)=0\right\}\right)=0.$$

(4) 設 μ_0, μ_1 和 μ_2 都是全有限测度，并且 $d\mu_0=f_1d(\mu_0+\mu_1)=f_2d(\mu_0+\mu_2)=fd(\mu_0+\mu_1+\mu_2)$，則几乎处处对于 $\mu_0+\mu_1+\mu_2$ 有

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{f_1(x)f_2(x)}{f_1(x)+f_2(x)-f_1(x)f_2(x)}, & \text{若 } f_1(x)f_2(x)\neq 0,\\ 0, & \text{若 } f_1(x)=f_2(x)=0.\end{cases}$$

(5) 設 $\{\mu_n\}$ 和 $\{\nu_n\}$ 是全有限测度的两个叙列，令

$$\bar{\mu}_n=\sum_{i=1}^{n}\mu_i,\qquad \bar{\nu}_n=\sum_{i=1}^{n}\nu_i,\qquad \mu=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i,\qquad \nu=\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i,$$

并假定 μ 和 ν 都是有限测度．如果 $\bar{\nu}_n\ll\bar{\mu}_n$, $n=1,2,\cdots$，則 $\nu\ll\mu$，并且

$$\lim_n\frac{d\bar{\nu}_n}{d\bar{\mu}_n}=\frac{d\nu}{d\mu}[\mu].$$

这个命題可以根据下列輔助定理而得証.

(5a) 設 $\{E_n\}$ 是可測集的叙列使得 $\bar{\mu}_n(E_n)=0$, $n=1, 2, \cdots$, 則 $\mu(\limsup_n E_n)=0$．（提示：$\bar{\mu}_n\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k\right)\leq\sum_{k=n}^{\infty}\bar{\mu}_k(E_k)$.）

(5b) 設 $\{\phi_n\}$ 和 $\{\psi_n\}$ 是两个函数列使得 $\phi_n=\psi_n[\bar{\mu}_n]$, $n=1,2,\cdots$，則几乎处处对于 μ 有

$$\limsup_n \phi_n(x)=\limsup_n \psi_n(x)$$

和

$$\liminf_n \phi_n(x)=\liminf_n \psi_n(x).$$

(提示：令 $E_n=\{x:\phi_n(x)\neq\psi_n(x)\}$，应用(5a).)

由(5b)可知，我們只須对于导数$\frac{d\bar{\nu}_n}{d\bar{\mu}_n}$的任意一种固定的表示式来証明(5). 令

$$\frac{d\nu_n}{d\mu}=f_n \quad 和 \quad \frac{d\mu_n}{d\mu}=g_n, \qquad n=1,2,\cdots,$$

則根据定理 1,

$$\frac{d\bar{\nu}_n}{d\bar{\mu}_n}=\frac{f_1+\cdots+f_n}{g_1+\cdots+g_n}[\bar{\mu}_n], \qquad n=1,2,\cdots$$

就是这样一种固定的表示式.

(5c) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n=\frac{d\nu}{d\mu}$, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n=1[\mu]$. (提示：由于

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(E)=\int_E (g_1+\cdots+g_n)\,d\mu$$

和

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i(E)=\int_E (f_1+\cdots+f_n)\,d\mu, \qquad n=1,2,\cdots,$$

根据 §27 定理 2 和 §25 定理 5 即得結論.)

第七章

乘积空間

§33. 笛卡兒乘积空間

設 X 和 Y 是任意两个集(不一定是同一空間的子集),由一切序偶 (x, y) 組成的集,其中 $x\in X$, $y\in Y$, 称为**笛卡兒乘积空間**,記为 $X\times Y$. 笛卡兒乘积空間的最为熟知的例子是欧几里得平面,它常被看作两个坐标軸的乘积. 在以下的討論中,許多地方要用到由这个例子所启示的术語和概念. 例如,若 $A\subset X$, $B\subset Y$, 則我們称集 $E=A\times B$($X\times Y$ 的一个子集)为**矩形**,而称构成这个矩形的集 A 和 B 为矩形的**边**(注意,除非在矩形的边是区間的情形下,此处的用法和通常矩形的意义不同)。

定理 1. 矩形为空集的必要和充分条件是:它的一个边为空集.

証明。設 $A\times B\neq 0$; 如果 $(x, y)\in A\times B$, 則同时有 $x\in A$ 和 $y\in B$, 因此 $A\neq 0$, $B\neq 0$. 另一方面,如果 $A\neq 0$, $B\neq 0$, 則存在一个点 (x, y) 使得 $(x, y)\in A\times B$, 因此 $A\times B\neq 0$. ▌

定理 2. 設 $E_1=A_1\times B_1$ 和 $E_2=A_2\times B_2$ 是兩个非空矩形,則 $E_1\subset E_2$ 的必要和充分条件是

$$A_1\subset A_2 \qquad 和 \qquad B_1\subset B_2.$$

証明. 条件显然是充分的. 条件的必要性可以証明如下. 設 $(x, y)\in A_1\times B_1$. 假定存在 A_1 中的点 x_1 使得 $x_1\in' A_2$, 則将有

$$(x_1, y)\in A_1\times B_1 \qquad 和 \qquad (x_1, y)\in' A_2\times B_2.$$

由此可見,这样的点 x_1 不可能存在,因此 $A_1\subset A_2$. 同理可証

$B_1 \subset B_2$。 ▌

定理 3. 設 $A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2$ 是一个非空矩形，则 $A_1 = A_2$，$B_1 = B_2$。

証明。根据定理 2，

$$A_1 \subset A_2 \subset A_1, \qquad B_1 \subset B_2 \subset B_1. \quad ▌$$

定理 4. 設 $E = A \times B$，$E_1 = A_1 \times B_1$和$E_2 = A_2 \times B_2$是三个非空矩形，则 E 成为 E_1与E_2 的不相交併集的必要和充分条件是：或者 A 是 A_1 与 A_2 的不相交併集而 $B = B_1 = B_2$，或者 B 是 B_1 与 B_2的不相交併集而 $A = A_1 = A_2$，二者必居其一。

証明。首先証明条件是必要的。由于 $E_1 \subset E$ 和 $E_2 \subset E$，根据定理 2 有 $A_1 \subset A$ 和 $A_2 \subset A$，从而有 $A_1 \cup A_2 \subset A$；同理，$B_1 \cup B_2 \subset B$。但因

$$E_1 \cup E_2 \subset (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2),$$

我們有 $A \subset A_1 \cup A_2$ 和 $B \subset B_1 \cup B_2$，因此有 $A = A_1 \cup A_2$ 和 $B = B_1 \cup B_2$。类似地可証

$$0 = E_1 \cap E_2 \supset (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),$$

由定理 1 可知，$A_1 \cap A_2$ 和 $B_1 \cap B_2$ 二者中至少有一个是空集。

設 $A_1 \cap A_2 = 0$，以下我們証明在这个場合下必有 $B = B_1 = B_2$（$B_1 \cap B_2 = 0$ 的場合可以类似地加以討論）。假定存在点 $y \in B - B_1$。如果 x 是 A_1 中任意的点，则$(x, y) \in E$；但是我們知道（由于 $y \in' B_1$）$(x, y) \in' E_1$，并且（由于 $x \in' A_2$）$(x, y) \in' E_2$。这个結果与假設条件 $E = E_1 \cup E_2$ 相抵触，因此 $B - B_1 = 0$；同理 $B - B_2 = 0$。

条件的充分性証明比較簡单。設 A 是 A_1 和 A_2 的不相交併集，并且 $B = B_1 = B_2$。于是有 $A \supset A_1$，$A \supset A_2$，$B \supset B_1$，$B \supset B_2$，因此 $E \supset E_1 \cup E_2$。此外，如果$(x, y) \in E$，则按照 $x \in A_1$ 或 $x \in A_2$而分别有

$$(x, y) \in E_1 \qquad \text{或} \qquad (x, y) \in E_2,$$

可見 E 的确是 E_1 和 E_2 的不相交併集。 ▌

定理 5. 設 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{T}$ 分别是由 X 和 Y 的子集組成的环，則由

形如 $A\times B$ 的矩形的一切不相交有限并组成的类 $\mathbf{R}$，其中 $A\in\mathbf{S}$，$B\in\mathbf{T}$，是一个环。

証明。我們首先証明，两个形如 $A\times B$ 之集的交集仍是一个形如 $A\times B$ 的集。如果二集中有一个是空集，或者二集的交集是空集，这个結果是很明显的。如果

$$E_1=A_1\times B_1,\qquad E_2=A_2\times B_2,$$

并且

$$(x,y)\in E_1\cap E_2,$$

則有 $x\in A_1\cap A_2$ 和 $y\in B_1\cap B_2$，因此

$$E_1\cap E_2\subset(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2).$$

另一方面，根据定理 2，$(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$ 被 E_1 和 E_2 所包，因而也被 $E_1\cap E_2$ 所包。因此

$$E_1\cap E_2=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2).$$

但因 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{T}$ 都是环，所以 $A_1\cap A_2\in\mathbf{S}$，$B_1\cap B_2\in\mathbf{T}$。由此立即可以推知，$\mathbf{R}$ 对于有限交的运算是封閉的。

由于

$$(A_1\times B_1)-(A_2\times B_2)=$$
$$=[(A_1\cap A_2)\times(B_1-B_2)]\cup[(A_1-A_2)\times B_1],$$

我們看出，两个形如 $A\times B$ 之集的差集是另外两个同样形式之集的不相交併集；但因

$$\bigcup_{i=1}^{n}E_i-\bigcup_{j=1}^{m}F_j=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m}(E_i-F_j),$$

利用上段的結果可知，$\mathbf{R}$ 对于差集的运算是封閉的。最后，$\mathbf{R}$ 对于不相交有限併的运算显然是封閉的，定理于是証明完畢。▌

現在假定 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{T}$ 分别是由 X 和 Y 的子集組成的 σ-环。我們用記号 $\mathbf{S}\times\mathbf{T}$ 表示由一切形如 $A\times B$ 之集的类产生的 σ-环，其中 $A\in\mathbf{S}$，$B\in\mathbf{T}$。这个 σ-环是由 $X\times Y$ 的子集組成的。

定理 6. 設 $(X,\mathbf{S})$ 和 $(Y,\mathbf{T})$ 是可測空間，則 $(X\times Y,\mathbf{S}\times\mathbf{T})$ 也是可測空間。

可測空間 $(X\times Y,\mathbf{S}\times\mathbf{T})$ 称为可測空間 $(X,\mathbf{S})$ 和 $(Y,\mathbf{T})$ 的笛卡兒

乘积空間。

証明。設$(x, y)\in X\times Y$,則存在集A和B使得$x\in A\in \mathbf{S}$, $y\in B\in \mathbf{T}$;因此$(x, y)\in A\times B\in \mathbf{S}\times \mathbf{T}$。 ▌

我們注意到，这是我們第一次引用測度空間是它的可測集的併集这一事实;在本章中,我們将会看到可測空間这个性質的重要用处。

我們将不止一次地用到**可測矩形**的概念。現在我們給出它的两个定义，它們都是很明显而且自然的。第一个定义：可測空間$(X, \mathbf{S})$和$(Y, \mathbf{T})$的笛卡兒乘积空間中的矩形若屬于$\mathbf{S}\times \mathbf{T}$，則称为可測矩形；第二个定义：若$A\in \mathbf{S}$, $B\in \mathbf{T}$,則$A\times B$称为可測矩形。对于非空矩形,不难驗証这两个定义是等价的;目前我們采用第二个定义。按照这个定义,我們就可以說,两个可測空間的笛卡兒乘积空間中的全体可測集类就是由全体可測矩形类产生的σ-环。

(1) [可測]矩形的任何可列类的交集是[可測]矩形。如果将"可列"二字略去,这个命題是否成立?

(2) 对于空的矩形,定理 2 和定理 4 中的条件并非必要，又定理 3 也不成立。

(3) 在定理 5 的假設条件下，由一切形如$A\times B$的集組成的类$\mathbf{P}$，其中$A\in \mathbf{S}$, $B\in \mathbf{T}$,是一个半环。如果$\mathbf{S}$和$\mathbf{T}$是半环,上述命題是否成立?

(4) 如果(3)中的环$\mathbf{S}$和$\mathbf{T}$各包含两个或两个以上不相同的非空集，則$\mathbf{P}$不是一个环。

(5) $\mathbf{S}\times \mathbf{T}$为$\sigma$-代数的必要和充分条件是:$\mathbf{S}$和$\mathbf{T}$都是$\sigma$-代数。

(6) 設$(X, \mathbf{S})$和$(Y, \mathbf{T})$是可測空間,則$X\times Y$中任意一个可測集被一个可測矩形所包.(提示:能被可測矩形遮盖的集組成一个σ-环.)

§34. 截 口

設$(X, \mathbf{S})$和$(Y, \mathbf{T})$是可測空間，$(X\times Y, \mathbf{S}\times \mathbf{T})$是它們的笛卡兒乘积空間。如果$E$是$X\times Y$的任意一个子集，$x$是$X$中任意一个点,我們称集$E_x=\{y:\ (x, y)\in E\}$是$E$的一个**截口**，說得更确切

些，是由 x 确定的截口。关于截口，有时我們只注意它是由空間 X 中的点所确定(因而这个截口是 Y 的一个子集)，至于究竟是由哪一个点所确定，則無关紧要，这时我們可以用 **X-截口**这个术語来表示。集 $E^y=\{x:(x,y)\in E\}$ 称为由 Y 中的点 y 所确定的 **Y-截口**；主要的是应該对 X-截口与 Y-截口加以区别。我們特别强調指出，乘积空間中的集的截口并不是这个乘积空間中的集，而是分支空間的子集。

設 f 是定义在乘积空間 $X\times Y$ 的子集 E 上的任意一个函数，x 是 X 中任意一个点，則定义在截口 E_x 上由等式

$$f_x(y)=f(x,y)$$

定出的函数 f_x 称为 f 的**截口**，說得确切些，是 f 的 **X-截口**，更确切些，是由 x 确定的截口。同样，由 Y 中点 y 确定的 f 的 Y-截口定义为 $f^y(x)=f(x,y)$。

定理 1. 可測集的每一个截口是可測集。

証明。設 $\mathbf{E}$ 是由 $X\times Y$ 中具有下述性質的一切子集組成的类：它的每一个截口是可測集。如果 $E=A\times B$ 是一个可測矩形，則 E 的截口或者是空集，或者等于 E 的一个边(A 或 B，按照截口是 Y-截口或 X-截口而定)，因而 $E\in\mathbf{E}$。容易驗証，$\mathbf{E}$ 是一个 σ-环，因此 $\mathbf{S}\times\mathbf{T}\subset\mathbf{E}$。 ▌

定理 2. 可測函数的每一个截口是可測函数。

証明。設 f 是定义在 $X\times Y$ 上的可測函数，$x\in X$，M 是数直綫上任意一个波雷耳集，則由定理 1 及关系式

$$f_x^{-1}(M)=\{y:\ f_x(y)\in M\}=\{y:f(x,y)\in M\}=$$
$$=\{y:(x,y)\in f^{-1}(M)\}=(f^{-1}(M))_x$$

即得 $N(f_x)\cap f_x^{-1}(M)$ 的可測性 (我們注意到 $N(f_x)=(N(f))_x$)。类似地可以証明，f 的任意 Y-截口也是可測的。 ▌

(1) 設 χ 是 $X\times Y$ 的子集 E 的特征函数，則 χ_x 和 χ^y 分别是 E_x 和 E^y 的特征函数．特别是，如果 χ 是矩形 $A\times B$ 的特征函数，則有

$$\chi(x,y)=\chi_A(x)\chi_B(y).$$

簡单函数的每一个截口是簡单函数.

(2) 設 $X=Y$ 是任意不可列集, $\mathbf{S}=\mathbf{T}$ 是由全体可列子集組成的类. 令 $D=\{(x,y):x=y\}$, 則 D 的每一个截口是可测的, 但 D 是不可测的; 换一句話說, 定理 1 的逆定理不成立.

(3) 設 f 是定义在可测空間 X 和 Y 的笛卡兒乘积空間上的广义实值函数, 具有下述性質: 对于数直綫上的每一个波雷耳集 M, $f^{-1}(M)$ 与任何可测集的交集是可测集; 則 f 的每一个截口也具有这个性質. 如果在可测空間的定义中, 将"可测空間是全体可测集的併集"这一条件除去, 上述命題是否仍成立? 上述性質与可测性之間的因果关系如何?

(4) 非空矩形为可测集, 当而且只当它是可测矩形时. (提示: 如果 $A\times B$ 可测, 則 $A\times B$ 的每一个截口可测.)

(5) 設 $(X,\mathbf{S})$ 是一个可测空間使得 $X\in\mathbf{S}$ (即, 使得 $\mathbf{S}$ 是一个 σ-代数), Y 是数直綫, $\mathbf{T}$ 是全体波雷耳集类. 如果 f 是定义在 X 上的非負实値函数, 則称 $X\times Y$ 的子集

$$V^*(f)=\{(x,y):x\in X,\quad 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$$

为 f 的**上縱标集**, 而称

$$V_*(f)=\{(x,y):\ x\in X,\quad 0\leqslant y<f(x)\}$$

为 f 的**下縱标集** (例如, 恒等于零的函数的下縱标集是空集). 下面一系列的命題是对于函数可测性的另一种考慮方式.

(5a) 如果 f 是一个非負簡单函数, 則 $V^*(f)$ 和 $V_*(f)$ 都是可测集. (提示: 这两个集都是有限个可测矩形的併集.)

(5b) 如果 f 和 g 是非負函数使得对于一切 x 有 $f(x)\leqslant g(x)$, 則

$$V^*(f)\subset V^*(g),\qquad V_*(f)\subset V_*(g).$$

(5c) 如果 $\{f_n\}$ 是非負函数的一个增叙列, 并且这个叙列处处收斂到 f, 則 $\{V_*(f_n)\}$ 是一个以 $V_*(f)$ 为和集的遞增集叙列; 类似地, 如果 $\{f_n\}$ 是非負函数的一个减叙列, 并且这个叙列处处收斂到 f, 則 $\{V^*(f_n)\}$ 是一个以 $V^*(f)$ 为交集的遞减集叙列.

(5d) 如果 f 是一个非負可测函数, 則 $V^*(f)$ 和 $V_*(f)$ 都是可测集. (提示: 如果 f 是有界的, 則存在簡单函数的叙列 $\{g_n\}$ 和 $\{h_n\}$ 使得

$$0 \leqslant g_n \leqslant g_{n+1} \leqslant f \leqslant h_{n+1} \leqslant h_n, \qquad n=1,2\cdots,$$

并使得 $\lim_n g_n = \lim_n h_n = f$.）

(5e) 如果 E 是 $X \times Y$ 中的任意可测集，α 和 β 是两个实数，其中 $\alpha > 0$，則集 $\{(x,y):(x,\alpha y+\beta)\in E\}$ 是 $X \times Y$ 的一个可測子集.（提示：如果 E 是一个可測矩形，結論成立；一切能使結論成立的集組成一个 σ–环.）

(5f) 如果 f 是一个非負函数使得 $V^*(f)$ [或 $V_*(f)$] 为可測，則 f 是一个可测函数.（提示：关于 $V^*(f)$ 的部分，只須証明对于每一个正的实数 c，$\{x: f(x)>c\}$ 是一个可測集. 令 $E=V^*(f)$，則

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{(x,y):\left(x,\frac{1}{n}y+c\right)\in E,\ y>0\right\}=\{(x,y):f(x)>c,\quad y>0\};$$

因为可測矩形的边是可测的，由此即得命題的結論.）

(5g) 如果称集 $\{(x,y): f(x)=y\}$ 为函数 f（不限定是非負的）的**圖象**，則可測函数的圖象是可測集.

§35. 乘积測度

我們現在繼續研究笛卡兒乘积空間的性質，考慮乘积空間的分支空間不但是可測空間，并且是測度空間的情形.

定理 1. 設 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 和 $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ 是 σ–有限測度空間，E 是 $X \times Y$ 的任意可测子集，則定义在 X 上由等式 $f(x)=\nu(E_x)$ 确定的函数 f 以及定义在 Y 上由等式 $g(y)=\mu(E^y)$ 确定的函数 g 都是非負可測函数，并且

$$\int f\,d\mu=\int g\,d\nu.$$

証明. 設 $\mathbf{M}$ 是由能使結論成立的一切集 E 組成的类，則不难看出，$\mathbf{M}$ 对于不相交可列併的运算是封閉的. 由 μ 和 ν 的 σ–有限性可知，$\mathbf{S} \times \mathbf{T}$ 中的每一个集能被可列个不相交可測矩形的併集所遮盖，其中每一个可測矩形的边具有有限的測度. 由此可見，如果我們能够証明，对于边的測度为有限的每一个可測矩形，它的每一个可測子集属于 $\mathbf{M}$，則任何可測集都将属于 $\mathbf{M}$. 換一句話說，定

理的証明只須在有限測度的場合下进行；对于有限測度，下面我們証明，每一个可測矩形(因而，可測矩形的任何不相交有限併)屬于$\mathbf{M}$，并且$\mathbf{M}$是一个单調类。

設$E=A\times B$是一个非空可測矩形，則有$f=\nu(B)\chi_A$和$g=\mu(A)\chi_B$。于是f和g都是可測函数，并且

$$\int f\,d\mu=\mu(A)\cdot\nu(B)=\int g\,d\nu.$$

$\mathbf{M}$是单調类这一事实可由关于函数列积分的定理(特別是§26定理4和§27定理2)导出(測度μ和ν的有限性說明这些定理是可以应用的)。

因为由可測矩形的一切不相交有限併組成的类是一个环(§33定理5)，并且根据定义，全体可測集类就是由这个环产生的σ-环，所以(§6定理2)每一个可測集屬于$\mathbf{M}$，定理于是証明完畢。▎

定理2. 設$(X,\mathbf{S},\mu)$和$(Y,\mathbf{T},\nu)$是σ-有限測度空間；对于$\mathbf{S}\times\mathbf{T}$中每一个集$E$，令

$$\lambda(E)=\int\nu(E_x)\,d\mu(x)=\int\mu(E^y)\,d\nu(y).$$

則集函数λ是一个σ-有限測度，并且具有下述性質：对于每一个可測矩形$A\times B$，

$$\lambda(A\times B)=\mu(A)\cdot\nu(B).$$

这个条件唯一地确定了λ。

測度λ称为測度μ和ν的**乘积測度**，記为$\lambda=\mu\times\nu$；測度空間$(X\times Y,\mathbf{S}\times\mathbf{T},\mu\times\nu)$称为測度空間$(X,\mathbf{S},\mu)$和$(Y,\mathbf{T},\nu)$的**笛卡兒乘积空間**。

証明。利用关于单調叙列的积分定理(§27定理2，并参看27.2)就可以說明λ是一个測度。λ的σ-有限性可由下述事实导出：$X\times Y$的每一个可測子集能被可列个具有有限測度的可測矩形的併集所遮蓋；唯一性可由§13定理1导出。▎

(1) 設 $X=Y$ 是单位区間，$\mathbf{S}=\mathbf{T}$ 是全体波雷耳集类；令 $\mu(E)$ 为 E 的勒貝格測度，并令 $\nu(E)$ 为 E 中之点的数目．如果 $D=\{(x,y):x=y\}$；則 D 是 $X\times Y$ 的一个可測子集使得

$$\int\nu(D_x)d\mu(x)=1,\qquad \int\mu(D^y)d\nu(y)=0.$$

换一句話說，如果在定理1中将 σ–有限的条件除去，則定理不成立．

(2) 两个 σ–有限完备測度空間的笛卡兒乘积空間不一定是完备的．(提示：令 $X=Y$ 为单位区間，M 是 X 的一个不可測子集，y 是 Y 中任意一个点．考慮集 $M\times\{y\}$；參看 34.4．)

(3) 設 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 是一个全 σ–有限測度空間，$(Y,\mathbf{T},\nu)$ 是数直綫，其中 $\mathbf{T}$ 是全体波雷耳集类，ν 是勒貝格測度；并設 $\lambda=\mu\times\nu$．我們已經看到(34.5)，对于定义在 X 上的每一个非負可測函数 f，因而对于每一个非負可积函数 f，縱标集 $V^*(f)$ 和 $V_*(f)$ 都是 $X\times Y$ 的可測子集；現在我們断言：

$$\lambda(V_*(f))=\lambda(V^*(f))=\int f\,d\mu.$$

(提示：考慮到关于以簡单函数来逼近函数以及关于函数列积分的已知結論，只須对于簡单函数 f 証明上列等式．) 这个等式在闡述积分理論的另一个系統里，用来作为 $\int f\,d\mu$ 的定义；这就是"积分是曲綫下的面积"这一种說法的一个精确的表达方式．

(4) 在(3)的假設条件下，可測函数的圖象是測度为零的集．(提示：只須考慮定义在全有限測度空間上的非負有界可測函数，而对于这种函数可以应用(3)．)

(5) 設 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 和 $(Y,\mathbf{T},\nu)$ 是 σ–有限測度空間，$\lambda=\mu\times\nu$，則对于 $\mathbf{H}(\mathbf{S}\times\mathbf{T})$ 中的每一个集 E，$\lambda^*(E)$ 是形如 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(E_n)$ 的和数的下确界，其中 $\{E_n\}$ 是遮盖 E 的可測矩形列．(提示：參看 33.3, §10 定理1，和 8.5．)

§36. 富比尼定理

在本节中我們将研究乘积空間上的积分与分支空間上的积分之間的关系．在整个这一节里，我們假定：

$(X,\mathbf{S},\mu)$ 和 $(Y,\mathbf{T},\nu)$ 是 σ–有限測度空間，$\lambda=\mu\times\nu$ 是 $\mathbf{S}\times\mathbf{T}$ 上

的乘积測度。

設定义在 $X\times Y$ 上的函数 h 能使它的积分有定义(例如，若 h 为可积函数或非負可測函数)，則积分記为

$$\int h(x,y)d\lambda(x,y) \qquad 或 \qquad \int h(x,y)d(\mu\times\nu)(x,y),$$

并称为 h 的**重积分**。設 h_x 能使

$$\int h_x(y)d\nu(y)=f(x)$$

有定义，并且 $\int f\,d\mu$ 也有定义，則習慣上記为

$$\int f\,d\mu=\int\int h(x,y)d\nu(y)d\mu(x)=\int d\,\mu(x)\int h(x,y)d\nu(y).$$

类似地，如果 g 是定义在 Y 上由等式

$$\int h^y(x)d\mu(x)=g(y)$$

确定的函数，則它的积分(若存在)記为

$$\int g d\nu=\int\int h(x,y)d\mu(x)d\nu(y)=\int d\nu(y)\int h(x,y)d\mu(x).$$

积分 $\int\int h\,d\mu d\nu$ 和 $\int\int h\,d\nu d\mu$ 称为 h 的**叠积分**。我們用下面的記号表示 h 在 $X\times Y$ 的一个可測子集 E 上的重积分和叠积分，也就是 $\chi_E h$ 的重积分和叠积分：

$$\int_E h d\lambda, \qquad \int\int_E h\,d\mu d\nu, \qquad \int\int_E h\,d\nu d\mu.$$

由于(集或函数的) X-截口是由 X 中的点所确定的，所以，如果我們說，"某一个命題对于几乎每一个 X-截口成立"，这就意味着使得命題不成立的点 x 所成的集是 X 中一个測度为零的集。类似地可以定义"几乎每一个 Y-截口"这一說法。如果一个命題同时对于几乎每一个 X-截口和几乎每一个 Y-截口成立，我們就說命題对于几乎每一个截口成立。

下面是一个簡单然而重要的定理。

定理 1. $X\times Y$ 的可測子集 E 具有零測度的必要和充分条件是：几乎每一个 X-截口[或几乎每一个 Y-截口]具有零測度。

証明。根据乘积測度的定义，我們有

$$\lambda(E)=\begin{cases}\int \nu(E_x)\,d\mu(x),\\ \int \mu(E^y)\,d\nu(y).\end{cases}$$

如果 $\lambda(E)=0$，則上式右端的两个积分是有限的，所以(根据§25定理2)它們的非負被积函数必須几乎处处为零。另一方面，如果任何一个被积函数几乎处处为零，則 $\lambda(E)=0$。 ▌

定理 2. 如果 h 是定义在 $X\times Y$ 上的非負可測函数，則

$$\int h d(\mu\times\nu)=\int\int h\,d\mu d\nu=\int\int h\,d\nu d\mu.$$

証明。如果 h 是一个可測集 E 的特征函数，則有

$$\int h(x,y)d\nu(y)=\nu(E_x) \quad 和 \quad \int h(x,y)d\mu(x)=\mu(E^y),$$

由 §35 定理 2 即得定理的結論。在一般情形，我們可以选取一个处处收斂到 h 的非負簡单函数的增叙列 $\{h_n\}$ (§20 定理 2)。由于簡单函数是有限个特征函数的綫性組合，所以定理的結論对于每一个 h_n 成立。

根据 §27 定理 2，有

$$\lim_n\int h_n d\lambda=\int h d\lambda.$$

令

$$f_n(x)=\int h_n(x,y)d\nu(y),$$

則由叙列 $\{h_n\}$ 的性質可知，$\{f_n\}$ 是非負可測函数的一个增叙列，这个叙列处处收斂到

$$f(x)=\int h(x,y)d\nu(y)$$

（参看 §27 定理 2）。由此可見，f 是可測的（并且显然是非負的）；再应用一次 §27 定理 2 就得到下面的結論：

$$\lim_n \int f_n d\mu=\int f d\mu.$$

这就証明了重积分与叠积分之一相等；类似地可以証明重积分与另外一个叠积分相等。▌

下面这个定理普遍地被称为**富比尼定理**，定理 1 和 2 有时也被称为富比尼定理。

定理 3. 設 h 是定义在 $X\times Y$ 上的可积函数，則 h 的几乎每一个截口是可积的。如果函数 f 和 g 分别由等式

$$f(x)=\int h(x,y)d\nu(y) \qquad 和 \qquad g(y)=\int h(x,y)d\mu(x)$$

确定，則 f 和 g 都是可积的，并且

$$\int hd(\mu\times\nu)=\int f d\mu=\int gd\nu.$$

証明. 因为实値函数为可积的必要和充分条件乃是它的正部和負部为可积，所以我們只須考虑函数 h 为非負的情形。在这种情形下，由定理 2 即得定理中最后的等式。由于非負可測函数 f 和 g 具有有限的积分，所以它們是可积的。这个性質說明了 f 和 g 是几乎处处有限的，因此，h 的截口具有定理中所述的可积性，定理于是証明完畢。▌

(1) 設 X 是势为 $\aleph_1$ 的一个集，**S** 是由一切可列集及其余集組成的类；对于 **S** 中的 A，若 A 是可列的，令 $\mu(A)=0$，若 A 是不可列的，則令 $\mu(A)=1$. 設 $(Y,\mathbf{T},\nu)=(X,\mathbf{S},\mu)$，$E$ 是 $X\times Y$ 的一个子集，它在每一个垂直直綫上是可列的，而对于每一个水平直綫 L，$L-E$ 是可列的（参看 31.11），并設 h 是 E 的特征函数，則 h 是一个非負函数使得

$$\int h(x,y)\,d\mu(x)=0, \qquad \int h(x,y)d\nu(y)=1.$$

这个例子并不是定理2的反例，为甚么？

(2) 設$(X, \mathbf{S}, \mu)$和$(Y, \mathbf{T}, \nu)$是具有勒貝格測度的单位区間，E是$X\times Y$的一个子集，使得对于每一个x和每一个y，E_x和$X-E^y$都为可列（参看(1)），則E是不可測的.

(3) 下面所述的是本节定理的一个有趣的扩充. 設$(X, \mathbf{S}, \mu)$是一个全有限測度空間，$(Y, \mathbf{T})$是一个可測空間使得$Y\in\mathbf{T}$. 假定对于X中几乎每一个x，有$\mathbf{T}$上的一个有限測度ν_x与之对应，并滿足下述条件：对于Y的每一个固定的可測子集B，若令$\phi(x)=\nu_x(B)$，則ϕ是定义在X上的一个可測函数. 令$\nu(B)=\int\nu_x(B)d\mu(x)$，如果$g$是定义在$Y$上的一个非負可測函数，并且令$f(x)=\int g(y)d\nu_x(y)$，則$f$是定义在$X$上的一个非負可測函数，并且有$\int fd\mu=\int gd\nu$.

(4) 富比尼定理的証明在有些文献中比我們所給出的証明稍为复杂些，这是由于将λ增补成为完全測度而引起的. 換一句話說，如果将λ换为$\overline{\lambda}$，本节的几个定理仍然成立.（提示：每一个$\overline{(\mathbf{S}\times\mathbf{T})}$可測的函数必与一个$(\mathbf{S}\times\mathbf{T})$可測的函数几乎处处相等[$\lambda$]；参看21.1.）

在以下(5)至(9)中，我們假定測度空間$(X, \mathbf{S}, \mu)$和$(Y, \mathbf{T}, \nu)$都是全有限的. 容易驗証，得出的結論可以扩充到全σ-有限測度空間的情形，因而也可以扩充到两个σ-有限測度空間的乘积空間中每一个可測子集上.

(5) 設E和F是$X\times Y$的可測子集使得对于X中[几乎]每一个x有$\nu(E_x)=\nu(F_x)$，則$\lambda(E)=\lambda(F)$.（这个命题的某些特殊情形常以不严格的形式表达出来而称为**开伐里里原理**.）

(6) 設f和g分别是定义在X和Y上的可积函数，則由等式$h(x,y)=f(x)g(y)$确定的函数h是定义在$X\times Y$上的可积函数，并且

$$\int hd(\mu\times\nu)=\int fd\mu\cdot\int gd\nu.$$

(7) 設$\mu(X)=\nu(Y)=1$，A_0和B_0分别是X和Y的可測子集使得$\mu(A_0)=\nu(B_0)=\frac{1}{2}$. 設$\chi$是$(A_0\times Y)\,\Delta\,(X\times B_0)$的特征函数，并令$f(x,y)=2\chi(x,y)$. 如果对于$X\times Y$的每一个可測子集$E$，令

$$\tilde{\lambda}(E)=\int_E f(x,y)d\lambda(x,y),$$

則 $\bar{\lambda}$ 是 $\mathbf{S}\times\mathbf{T}$ 上的一个有限測度，具有下述性質：当 $A\in\mathbf{S}$, $B\in\mathbf{T}$，有 $\bar{\lambda}(A\times Y)=\mu(A)$ 和 $\bar{\lambda}(X\times B)=\nu(B)$. 換一句話說，乘积測度 λ 并不是由它在这些特殊矩形上的值所唯一确定的.

(8) 乘积空間的存在性常用下述直接但比較复杂的方法来証明. 由可測矩形的一切不相交有限併組成的类是一个环 $\mathbf{R}$ (§33 定理 5)；如果

$$\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\times B_i) \qquad \text{和} \qquad \bigcup_{j=1}^{m}(C_j\times D_j)$$

是 $\mathbf{R}$ 中同一个集的两种表示方式，則因

$$\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}[(A_i\cap C_j)\times(B_i\cap D_j)]$$

是这个集的另一种表示方式，我們有

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\cdot\nu(B_i)=\sum_{j=1}^{m}\mu(C_j)\cdot\nu(D_j).$$

換一句話說，等式

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\times B_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\cdot\nu(B_i)$$

唯一地确定了定义在 $\mathbf{R}$ 上的一个集函数 λ. 可以証明(主要是对于 $\mathbf{R}$ 中之集証明一种較弱形式的富比尼定理)，λ 是一个測度，对于这个測度可以应用測度的扩張定理(§13 定理 1).

(9) 設 A 和 B 分别是 X 和 Y 的任意子集(不一定是可測的)，則

$$\lambda^*(A\times B)=\mu^*(A)\cdot\nu^*(B).$$

(提示：設 A^* 和 B^* 分别是 A 和 B 的可測复盖，則由关系式 $A\times B\subset A^*\times B^*$ 可以推出 $\lambda^*(A\times B)\leq\mu^*(A)\cdot\nu^*(B)$. 另一方面，考慮 $A\times B$ 的一个可測复盖 E^*，可以导出反方向的不等式. 由于 $E^*\cap(A^*\times B^*)$ 也是 $A\times B$ 的一个可測复盖，我們可以假定 $E^*\subset A^*\times B^*$. 根据富比尼定理，我們有

$$\lambda(E^*)\geq\int_{A^*}\nu(E_x^*)\,d\mu(x)\geq\mu^*(A)\cdot\nu^*(B).)$$

§37. 有限維乘积空間

前面我們建立了两个因子的乘积空間的理論；現在我們要研究怎样可以将这个理論扩充到有限个因子的場合. 設 $n(>1)$ 是一

个正整数，$X_1,\cdots,X_n$ 是 n 个集；由一切形如 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的元素組成的集，其中 $x_i\in X_i$，$i=1,\cdots,n$，称为这些集的**笛卡兒乘积空間**，記为

$$X_1\times\cdots\times X_n \quad \text{或} \quad \bigtimes_{i=1}^{n} X_i \quad \text{或} \quad \bigtimes\{X_i:\ i=1,\cdots,n\}.$$

若 A_i 是 X_i 的任意子集，$i=1,\cdots,n$，則称集 $\bigtimes_{i=1}^{n} A_i$ 是一个**矩形**。

对于笛卡兒乘积，正如同对于一种代数运算，我們要探討一下它是否滿足結合律。例如，若 X_1，X_2 和 X_3 是三个集，則不改变它們的次序我們可以作出三个新的集，$(X_1\times X_2)\times X_3$，$X_1\times(X_2\times X_3)$ 和 $X_1\times X_2\times X_3$。在怎样的意义下我們可以将这三个笛卡兒乘积空間看作相等呢？显然，它們并不是由相同的元素組成的；将 $((x_1,x_2),x_3)$ 和 (x_1,x_2,x_3) 混淆起来是不对的。然而，在上述三个笛卡兒乘积空間的每两个之間，存在一个很自然的一一对应关系，这就是使点

$$((x_1,x_2),x_3), \qquad (x_1,(x_2,x_3)) \qquad \text{和} \qquad (x_1,x_2,x_3)$$

互相对应的关系。对于笛卡兒乘积空間的那些使我們感兴趣的結构性的性質来說，这个对应关系能使它們保持不变，因此我們以后将上述三个乘积永远看作是恒等的。又如对于七个因子的情形，我們将集 $((X_1\times X_2)\times X_3)\times((X_4\times X_5)\times(X_6\times X_7))$ 的元素

$$(((x_1,x_2),x_3),((x_4,x_5),(x_6,x_7)))$$

看作就是集 $X_1\times X_2\times X_3\times X_4\times X_5\times X_6\times X_7$ 的元素

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7).$$

上面所述恒等的意义，使我們在許多定理的証明里，得以将語句的叙述簡单化。例如，我們可以将 $X_1\times\cdots\times X_n$ 看作每次取两个因子的連乘积：

$$(\cdots((X_1\times X_2)\times X_3)\times\cdots)\times X_n,$$

于是我們就可以利用数学归納法来証明与 §33 中定理相类似的定理。但在表达这些結論时必須稍加注意，以免錯誤。例如将 §33 定理 4 推广，它的正确的說法如下。如果

$$E=\times_{i=1}^{n}A_i, \qquad F=\times_{i=1}^{n}B_i \qquad 和 \qquad G=\times_{i=1}^{n}C_i$$

是三个非空矩形，則 E 成为 F 与 G 的不相交併集的必要和充分条件是：存在正整数 j，$1\leqslant j\leqslant n$，使得 A_j 是 B_j 与 C_j 的不相交併集，幷使得对于 $i\neq j$ 有

$$A_i=B_i=C_i.$$

关于（集或函数的）截口的概念，也需要稍加修改；由 X_j 中的点 x_j 所确定的，$\times_{i=1}^{n}X_i$ 中某集的 X_j-截口是

$$\times\{X_i:\ 1\leqslant i\leqslant n, i\neq j\}$$

的一个子集。

設 $(X_i, \mathbf{S}_i)$，$i=1, \cdots, n$，是可測空間，我們用記号

$$\mathbf{S}_1\times\cdots\times\mathbf{S}_n \text{ 或 } \times_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i \text{ 或 } \times_i\{\mathbf{S}_i: i=1, \cdots, n\}$$

表示由形如 $\times_{i=1}^{n}A_i$ 的一切矩形的类产生的 σ-环，其中 $A_i\in\mathbf{S}_i$，$i=1, \cdots, n$；幷定义可測空間 $(X_1\times\cdots\times X_n,\ \mathbf{S}_1\times\cdots\times\mathbf{S}_n)$ 为上述 n 个可測空間的笛卡兒乘积空間。由此可知，可測集[或可測函数]的每一个截口是可測集[或可測函数]。設有 n 个 σ-有限測度空間：$(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i)$，$i=1, \cdots, n$，利用数学归納法可以定义它們的笛卡兒乘积空間；在 $\mathbf{S}_1\times\cdots\times\mathbf{S}_n$ 上存在唯一的一个測度 μ（記为 $\mu_1\times\cdots\times\mu_n$），使得对于每一个可測矩形 $A_1\times\cdots\times A_n$，有

$$\mu(A_1\times\cdots\times A_n)=\prod_{i=1}^{n}\mu_i(A_i).$$

富比尼定理也可以直接加以推广，因而在一个乘积空間中可积函数的积分可以化为任何次序的叠积分而加以計算。

習慣上我們称乘积空間 $X=\times_{i=1}^{n}X_i$ 是 n 維的。我們引用这个术語，幷不是要对維数概念給以定义，也幷不認为对于一个空間来說維数是它的內在結构性的性質，而只是用来提醒我們由分支空間 X_i 构成 X 的方式。同一个測度空間，可能有时被看作是三維的，而有时却被看作是二維的；例如，若 $n=3$，我們可以将 X 看作 $X_1\times X_2\times X_3$，也可以看作 $X_0\times X_3$（其中 $X_0=X_1\times X_2$）。

在以下(1)至(5)中，我們假定 X_i 是数直綫，$\mathbf{S}_i$ 是全体波雷耳集类，μ_i 是勒貝格測度，$i=1,\cdots,n$；并令

$$(X,\mathbf{S},\mu)=\times_{i=1}^{n}(X_i,\mathbf{S}_i,\mu_i).$$

(1) σ-环 $\mathbf{S}$ 中的集称为 n 維歐几里得空間的**波雷耳集**．全体波雷耳集类就是由全体开集类产生的 σ-环．

(2) 設 ϕ 是定义在 X 上的波雷耳可测函数，$(Y,\mathbf{T})$ 是一个可測空間使得 $Y\in\mathbf{T}$，$f_1,\cdots,f_n$ 是定义在 Y 上的实値可測函数，則由等式 $\tilde{f}(y)=\phi(f_1(y),\cdots,f_n(y))$ 确定的函数 $\tilde{f}$ 是定义在 Y 上的可測函数(参看§19定理2)．

(3) 完全測度 $\bar{\mu}$ 称为 **n 維勒貝格測度**；§§15和16中絕大部分結論对于 $\bar{\mu}$ 都成立．特别是，若 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{C}$ 分别是全体开集类和全部閉集类，則对于 X 的每一个子集 E，有

$$\mu^*(E)=\inf\{\mu(U):\ E\subset U\in\mathbf{U}\}$$

和

$$\mu_*(E)=\sup\{\mu(C):\ E\supset C\in\mathbf{C}\}.$$

(4) 設 T 是由关系式

$$T(x_1,\cdots,x_n)=(y_1,\cdots,y_n),\ y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+b_i,\qquad i=1,\cdots,n$$

确定的綫性变换，則对于 X 的每一个子集 E，有

$$\mu^*(T(E))=|\Delta|\cdot\mu^*(E)\qquad 和\qquad \mu_*(T(E))=|\Delta|\cdot\mu_*(E),$$

其中 Δ 是矩陣 (a_{ij}) 的行列式．(提示：只須对以区間为边的可測矩形 E 証明这个命題．首先考慮下列特殊情形：

(4a) $y_i=x_i+b_i$，$i=1,\cdots,n$．

(4b) $y_i=x_i$ 若 $i\neq j$ 且 $i\neq k$；$y_j=x_k$，$y_k=x_j$．

(4c) $y_i=x_i$ 若 $i\neq j$；$y_j=x_j\pm x_k$，其中 $k\neq j$．

(4d) $y_i=x_i$ 若 $i\neq j$；$y_j=cx_j$．

要証明一般的情形，可以将 T 写成上列四种情形的变换的乘积．)

(5) 定义在 X 上由等式

$$\phi_j(x_1,\cdots,x_n)=x_j,\qquad j=1,\cdots,n$$

确定的函数 ϕ_j 是可測函数．

(6) n 維勒貝格測度可以不借助乘积空間的一般理論而定义．考慮空間 $X_1\times\cdots\times X_n$，其中 $X_i=X=$ 单位区間．对于 X 中每一个 x，設 $x=0.a_1a_2a_3\cdots$

是它的一个二进位小数展开式，幷令

$$x_i = 0.\alpha_i\alpha_{n+i}\alpha_{2n+i}\cdots, \qquad i=1, \cdots, n$$

（对于具有两种二进位展开式的 x，取定一种展开式；例如，可取它的有尽展开式）。由关系式 $T(x)=(x_1, \cdots, x_n)$ 确定的由 X 到 $X_1\times\cdots\times X_n$ 的变换 T 具有下述性質：若 E 是 $X_1\times\cdots\times X_n$ 的可測子集，則 $T^{-1}(E)=\{x: T(x)\in E\}$ 是 X 的可測子集（要証明这个事实，可考慮 E 是矩形并且 E 的边是以二进有理数为端点的区間的情形）。等式 $(\mu_1\times\cdots\times\mu_n)(E)=\mu(T^{-1}(E))$（其中 μ 是 X 中的勒貝格測度）可以用来作为乘积測度 $\mu_1\times\cdots\times\mu_n$ 的定义；这个定义与我們以前所述的定义是一致的。

(7) 利用对角綫法，令

$$x_1=0.\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_7\cdots,$$
$$x_2=0.\alpha_3\alpha_5\alpha_8\alpha_{12}\cdots,$$
$$x_3=0.\alpha_6\alpha_9\alpha_{13}\alpha_{18}\cdots,$$
$$x_4=0.\alpha_{10}\alpha_{14}\alpha_{19}\alpha_{25}\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

則(6)中所述的程序可以推广，从而类似地得出在一个"無限維"欧几里得空間中乘积測度的定义。

§38. 無限維乘积空間

要将乘积空間的理論推广到維数为無限的情形，第一步是很自然的。設 $\{X_i\}$ 是一个集叙列，由一切形如 $(x_1, x_2, \cdots)$ 的叙列組成的集，其中 $x_i\in X_i$，$i=1, 2, \cdots$，称为集叙列的笛卡兒乘积空間，記为

$$X=\times_{i=1}^{\infty}X_i.$$

但若每一个 X_i 是一个測度空間，$\mathbf{S}_i$ 是由它的可測集組成的一个 σ-环，μ_i 是 $\mathbf{S}_i$ 上的一个測度，則在 X 中可測性与測度的概念应該怎样定义，就不是很明显的了。在本节中，我們将在下面的假設条件下給出它們的定义：空間 X_i 是全有限測度空間，并且 $\mu_i(X_i)=1$，$i=1, 2, \cdots$。我們注意到，对于任何一个全有限測度空間 $(X, \mathbf{S}, \mu)$，只要 $\mu(X)\neq 0$，总可以将每一个可測集的測度除以 $\mu(X)$，因

而得到一个新的測度，使得整个空間的測度为 1。然而我們也将看到，由于 1 这个数在乘积(特別是無限个因子的乘积)的形成中占有特別重要的地位，所以 $\mu_i(X_i)=1$ 絕不只是一个普通的条件而已。

現在假定，对于每一个 $i=1, 2, \cdots$，X_i 是一个集，S_i 是由 X_i 的子集組成的一个 σ-代数，μ_i 是 S_i 上的一个測度，并且 $\mu_i(X_i)=1$。在这种情形下，我們定义**矩形**是形如 $\times_{i=1}^{\infty}A_i$ 的集，其中对于所有的 i 有 $A_i\subset X_i$，并且除去有限个 i 的值外有 $A_i=X_i$。矩形 $\times_{i=1}^{\infty}A_i$ 称为**可測矩形**，若每一个 A_i 是 X_i 的可測子集；根据上面的条件可知，这只是加之于有限个 A_i 的限制条件。設 S 是由全体可測矩形类产生的 σ-环(事实上它也是一个 σ-代数)，記为 $\mathrm{S}=\times_{i=1}^{\infty}\mathrm{S}_i$；$\times_{i=1}^{\infty}X_i$ 的子集若属于 S，則称为**可測集**。

設 J 是全体正整数集 I 的任意子集；

$$x=(x_1, x_2, \cdots) \qquad \text{和} \qquad y=(y_1, y_2, \cdots)$$

是两个点，如果对于 J 中每一个 j 有 $x_j=y_j$，則称点 x 和 y 在 J 上**相合**，記为 $x\equiv y(J)$。設 E 是 X 的一个子集，滿足下述条件：若 $x\equiv y(J)$，則 x 和 y 或者都在 E 中，或者都不在 E 中，二者必居其一；我們称 E 是一个 **J-柱面**。換一句話說，对于任意一个点，若改变它的那些指标不在 J 中的坐标，既不能使原来在 E 中的点移出 E 外，也不能使原来不在 E 中的点进入 E 中，則 E 是一个 J-柱面(参看 6.5d)。例如，若 $J=\{1, \cdots, n\}$，A_j 是 X_j 的任意子集，$j=1, \cdots, n$，則矩形 $A_1\times\cdots\times A_n\times X_{n+1}\times X_{n+2}\times\cdots$ 是一个 J-柱面。

我們将采用下面的記号：

$$X^{(n)}=\times_{i=n+1}^{\infty}X_i, \qquad n=0, 1, 2, \cdots;$$

根据我們所作的关于乘积空間恒等的規定，我們可以写成 $X=\times_{i=1}^{\infty}X_i=(X_1\times\cdots\times X_n)\times X^{(n)}$。与 $X(=X^{(0)})$ 一样，每一个 $X^{(n)}$ 是一个無限維乘积空間，因此，施行于 X 的論点(在以上和在后文中)可以同样用之于 $X^{(n)}$。对于 $X_1\times\cdots\times X_n$ 中每一个点 $(x_1, \cdots, x_n)$

和 X 中每一个集 E, 我們以記号 $E(x_1, \cdots, x_n)$ 表示由 $(x_1, \cdots, x_n)$ 确定的 E(在 $X^{(n)}$中) 的截口。我們看出，X 中[可測]矩形的每一个这种截口是 $X^{(n)}$中一个[可測]矩形。

定理 1. 設 $J=\{1, \cdots, n\}$, 并設 X 的子集 E 是一个[可測] J-柱面，則 $E=A\times X^{(n)}$, 其中 A 是 $X_1\times\cdots\times X_n$ 的一个[可測]子集。

証明。令$(\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \cdots)$为 $X^{(n)}$中任意一个点，A 为由这个点确定的 E (在 $X_1\times\cdots\times X_n$ 中)的 $X^{(n)}$-截口。因为集 E 和 $A\times X^{(n)}$都是 J-柱面，可見若 X 中一个点$(x_1, x_2, \cdots)$屬于这两个 J-柱面中任何一个，則点 $(x_1, \cdots, x_n, \bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \cdots)$也屬于同一个 J-柱面。但若点$(x_1, \cdots, x_n, \bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \cdots)$ 屬于两个 J-柱面 E 和 $A\times X^{(n)}$ 中的一个，則显然这个点也屬于这两个 J-柱面中的另外一个。同样的推理說明，若$(x_1, \cdots, x_n, \bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \cdots)$屬于两个 J-柱面中任何一个，則$(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots)$也屬于同一个 J-柱面；因此，E 和 $A\times X^{(n)}$是由同样的点組成的。根据 §34 定理 1 可知，若 E 是可測的，則 A 也是可測的。 ▌

設 m 和 n 是正整数，$m<n$，則 X 的非空子集 E 可能既是一个$\{1, \cdots, m\}$-柱面，同时又是一个$\{1, \cdots, n\}$-柱面。根据定理 1，我們有

$$E=A\times X^{(m)} \qquad \text{和} \qquad E=B\times X^{(n)},$$

其中 $A\subset X_1\times\cdots\times X_m$, $B\subset X_1\times\cdots\times X_n$。因为上面两个等式中的第一个可以写成下列形式：

$$E=(A\times X_{m+1}\times\cdots\times X_n)\times X^{(n)},$$

根据 §33 定理 3 就有 $B=A\times X_{m+1}\times\cdots\times X_n$。由此可見，若 E 是可測集，从而 A 和 B 都是可測集，則

$$(\mu_1\times\cdots\times\mu_m)(A)=(\mu_1\times\cdots\times\mu_n)(B).$$

因此，对于每一个可測$\{1, \cdots, n\}$-柱面 $A\times X^{(n)}$，若令

$$\mu(A\times X^{(n)})=(\mu_1\times\cdots\times\mu_n)(A),$$

則 μ 是具有确定意义的一个集函数。μ 的定义域記为 $\mathbf{F}$，它是由全体具有下述性質的可測集 E 組成的类：对于 n 的某一个值，E 是一个 $\{1, \cdots, n\}$-柱面；$\mathbf{F}$ 中的集可以称为 X 的有限維子集。容易驗証，$\mathbf{F}$ 是一个代数，$\mathbf{S}(\mathbf{F}) = \mathbf{S}$，并且定义在 $\mathbf{F}$ 上的集函数 μ 是非負有限值集函数，具有有限可加性。

与 $\mathbf{F}$ 和 μ 相仿，我們在空間 $X^{(n)}$ 中可以完全类似地定义 $\mathbf{F}^{(n)}$ 和 $\mu^{(n)}$，$n=1, 2, \cdots$。根据上节中得出的关于有限維乘积空間的性質，如果 E 屬于 $\mathbf{F}$，則每一个形如 $E(x_1, \cdots, x_n)$ 的截口都屬于 $\mathbf{F}^{(n)}$，并且

$$\mu(E) = \int \cdots \int \mu^{(n)}(E(x_1, \cdots, x_n)) d\mu_1(x_1) \cdots d\mu_n(x_n).$$

定理 2. 設 $\{(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i)\}$ 是全有限測度空間的一个叙列，$\mu_i(X_i) = 1$，則在 σ-代数 $\mathbf{S} = \times_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i$ 上存在唯一的一个測度 μ，使得对于每一个形如 $A \times X^{(n)}$ 的可測集 E，有

$$\mu(E) = (\mu_1 \times \cdots \times \mu_n)(A).$$

測度 μ 称为測度 μ_i 的**乘积測度**，記为 $\mu = \times_{i=1}^{\infty} \mu_i$；測度空間

$$(\times_{i=1}^{\infty} X_i, \quad \times_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i, \quad \times_{i=1}^{\infty} \mu_i)$$

称为測度空間 X_i 的**笛卡兒乘积空間**。

証明。我們只須証明，定义在由全体有限維可測集組成的代数 $\mathbf{F}$ 上的集函数 μ 在 0 是上連續的，也就是說，如果 $\{E_n\}$ 是 $\mathbf{F}$ 中之集的减叙列使得 $0 < \varepsilon \leqslant \mu(E_j)$，$j = 1, 2, \cdots$，則必有 $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \neq 0$；然后引用 §9 定理 6 和 §13 定理 1，就完成了本定理的証明。

令 $\qquad F_j = \left\{ x_1 : \mu^{(1)}(E_j(x_1)) > \frac{\varepsilon}{2} \right\}$，則由关系式

$$\mu(E_j) = \int \mu^{(1)}(E_j(x_1)) d\mu_1(x_1) =$$

$$= \int_{F_j} \mu^{(1)}(E_j(x_1)) d\mu_1(x_1) + \int_{F_j'} \mu^{(1)}(E_j(x_1)) d\mu_1(x_1)$$

得到 $\mu(E_j) \leqslant \mu_1(F_j) + \frac{\varepsilon}{2}$，因此

$$\mu_1(F_j) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

由于$\{F_j\}$是X_1的可測子集的一个減叙列，并且μ_1（具有可列可加性）在0是上連續的，因此在X_1中至少存在一个点$\bar{x}_1$使得$\mu^{(1)}(E_j(\bar{x}_1)) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}, j=1,2,\cdots$。又因$\{E_j(\bar{x}_1)\}$是$X^{(1)}$的可測子集的一个減叙列，所以剛才施之于$X$，$\{E_j\}$和$\varepsilon$的論点可以同样用之于$X^{(1)}$，$\{E_j(\bar{x}_1)\}$和$\frac{\varepsilon}{2}$。于是得到$X_2$中一个点$\bar{x}_2$使得$\mu^{(2)}(E_j(\bar{x}_1,\bar{x}_2)) \geqslant \frac{\varepsilon}{4}, j=1,2,\cdots$。这样繼續下去，我們得到一个叙列$\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots\}$使得$\bar{x}_n \in X_n, n=1,2,\cdots$，并使得

$$\mu^{(n)}(E_j(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}^n)) \geqslant \frac{\varepsilon}{2^n}, \qquad j=1,2,\cdots.$$

現在我們証明，点$(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots)$屬于$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$。考慮任意一个$E_j$，并設$E_j$是一个$\{1,\cdots,n\}$-柱面。由关系式

$$\mu^{(n)}(E_j(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)) > 0$$

可知，E_j中至少有一个点$(x_1,x_2,\cdots)$使得$x_i=\bar{x}_i, i=1,\cdots,n$。因为$E_j$是一个$\{1,\cdots,n\}$-柱面，所以$(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots)$屬于$E_j$。 ▌

(1) 对于本节的結論来說，指标集I为全体正整数集这一条件并不是主要的；任何可列的無限集都可以用来作为I（按照定义，空間$X=\times\{X_i : i \in I\}$是由定义在$I$上具有下述性質的一切函数$x$組成的：对于每一个指标$i$，函数值$x(i)$是$X_i$中的一个点）。要証明这个命題，可以利用枚举法，就是在I与全体正整数集之間建立任意一个固定的一一对应关系。在I是全体整数集的場合，本节的結論常常是很有用的。

(2) 将乘积空間的理論推广到不可列無限多个因子的場合是出乎意外地容易。設I是任意一个指标集，如果对于I中每一个i，$(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i)$是一个全有限測度空間，并且$\mu_i(X_i)=1$，則我們可以和在(1)中一样定义$X=\times\{X_i : i \in I\}$，至于矩形，可測矩形以及可測集的概念，則只要逐字逐句地重复可列个因子的情形就行了。考慮由全体具有下述性質的集E組成的类：对于I的某一个可列子集J，E是一个J-柱面；因为这个类是包含全体可測

矩形的一个σ-代数，所以每一个可测集E是一个J-柱面，其中J是I的一个可列子集．如果令$\mu(E)=(\times_{j\in J}\mu_j)(E)$，則$\mu$是定义在全体可測集类上的一个測度，并且$\mu$具有符合于記号$\times_{i\in I}\overline{\mu}_i$的乘积性質．

(3) 很容易将有限維和無限維乘积空間的理論結合起来，从而得出一种無限維乘积空間的理論，对于其中的有限个因子可以不要求它們是全有限測度空間，而只要求是σ-有限的．

(4) 設$X=\times_{i=1}^{\infty}X_i$是一个类如定理2中所述的乘积空間，如果对于每一个$i$，$E_i$是$X_i$的一个可測子集，則$E=\times_{i=1}^{\infty}E_i$是$X$的一个可測子集，并且

$$\mu(E)=\prod_{i=1}^{\infty}\mu_i(E_i)=\lim_n\prod_{i=1}^{n}\mu_i(E_i).$$

(提示：令$F_n=E_1\times\cdots\times E_n\times X^{(n)}$，則$\{F_n\}$是$X$中可測集的一个減叙列使得

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\times_{i=1}^{\infty}E_i,\qquad \mu(F_n)=\prod_{i=1}^{n}\mu_i(E_i).)$$

(5) 利用乘积空間的理論，可以給出数直綫上勒貝格測度的一种完全非拓扑性的构造方式(参看§8定理3的証明)，从而得到在n維欧几里得空間上勒貝格測度的构造(参看37.6)．設$(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$是仅包含两个点0与1的測度空間，$\mathbf{S}_0$是由$X_0$的一切子集組成的类，$\mu_0(\{0\})=\mu_0(\{1\})=\frac{1}{2}$．对于每一个$i=1,2,\cdots$，令$(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i)=(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$，并作成乘积空間

$$(X, \mathbf{S}, \mu)=(\times_{i=1}^{\infty}X_i,\ \times_{i=1}^{\infty}\mathbf{S}_i,\ \times_{i=1}^{\infty}\mu_i).$$

(5a) 对于X中每一个点$x=(x_1, x_2, \cdots)$，集$\{x\}$是可測的，并且$\mu(\{x\})=0$.(提示：参看(4).)

(5b) 設$\overline{E}$是由X中具有下述性質的一切点$x=(x_1, x_2, \cdots)$組成的集：除去有限个i的值外，对于任何其他的i值有$x_i=1$；則$\overline{E}$是測度为零的可測集．(提示：$\overline{E}$是可列的．)令$\overline{X}=X-\overline{E}$，在以下我們将考虑測度空間$(\overline{X}, \overline{\mathbf{S}}, \overline{\mu})$，其中$\overline{\mathbf{S}}=\mathbf{S}\cap\overline{X}$，$\overline{\mu}(E\cap\overline{X})=\mu(E)$，$E\in\mathbf{S}$.

(5c) 如果对于$\overline{X}$中每一个$x=(x_1, x_2, \cdots)$，令

$$z(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{2^i},$$

則函数 z 建立了 $\overline{X}$ 与区間 $Z=\{z:\ 0\leqslant z<1\}$ 之間的一个一一对应关系.（提示：考虑 Z 中每一个 z 的二进位小数展开式；如果展开式不是唯一的，則取有尽展开式.）

(5d) 設 $A=\{z:0\leqslant a\leqslant z<b\leqslant 1\}$，$E=\{x:\ z(x)\epsilon A\}$，則 E 是可测的，并且 $\overline{\mu}(E)=b-a$.（提示：只須考虑 a 和 b 是二进有理数的情形.）

(5e) 設 A 是 Z 中任意波雷耳集，$E=\{x:z(x)\epsilon A\}$，則 E 是可测的，并且 $\overline{\mu}(E)$ 等于 A 的勒貝格测度.（提示：由等式 $\nu(A)=\overline{\mu}(E)$ 确定的集函数 ν 是一个测度，它在区間上取值与勒貝格测度相等.）

以上(5a)—(5e)用来建立区間 Z 上的勒貝格测度. 将整个数直綫看作这类区間的不相交可列併集，我們就可以得到数直綫上的勒貝格测度. 另外一种方法是考虑由全体整数組成的空間 I（以 I 的全体子集組成的类作为可测集类，并定义一个集的测度为这个集所含点的数目），并注意到在数直綫与乘积空間 $I\times Z$ 之間存在一个很明显的一一对应关系.

(6) 下面是与 (5) 类似的另外一种建立勒貝格测度的方式. 考虑空間 $(X_0,\ \mathbf{S}_0,\ \mu_0)$，其中 X_0 是全体正整数集，$\mathbf{S}_0$ 是由 X_0 的全体子集組成的类，

$$\mu_0(E)=\sum_{i\epsilon E}2^{-i}.$$

和前面一样，我們作出乘积空間 $X=\times_{i=1}^{\infty}X_i$，$X$ 中的点是正整数的叙列. 对于 X 中每一个点 $x=(x_1,x_2,\cdots)$，令

$$z(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-(x_1+\cdots+x_n)}.$$

考虑二进位展开式，就可以証明(5c)，(5d)和(5e)中的結論对于这个 z 都成立.

(7) 設 $X_0=\{x:0\leqslant x<1\}$ 是半閉单位区間，$\mathbf{S}_0$ 是 X_0 中全体波雷耳集类，μ_0 是 $\mathbf{S}_0$ 上的勒貝格测度. 令

$$(X_i,\mathbf{S}_i,\mu_i)=(X_0,\mathbf{S}_0,\mu_0),\qquad i=1,2,\cdots,$$

并作出乘积空間 $X=\times_{i=1}^{\infty}X_i$. 在 X 和 X_0 之間存在一个一一对应关系，使得 X_0 中每一个波雷耳集与 X 中一个可测集(即屬于 $\times_{i=1}^{\infty}\mathbf{S}_i$ 的一个集) 相对应，并使得相对应的二集具有相等的测度.（提示：令 Y_0 为(5)中所述的只含有两个点的空間 X_0，对于 $i=0,1,2,\cdots$ 以及 $j=1,2,\cdots$，令 $Y_{ij}=Y_0$，則 X_i

$=\times_{j=1}^{\infty}Y_{ij}$, $i=0, 1, 2, \cdots$. 对应关系建立在通常关于二重叙列(即, $X=\times_{i=1}^{\infty}X_i=\times_{i=1}^{\infty}\times_{j=1}^{\infty}Y_{ij}$ 的元素) 与普通叙列 (即, $X_0=\times_{j=1}^{\infty}Y_{0j}$ 的元素) 之間的对应关系上.)

第八章

变换与函数

§39. 可测变换

在每一种数学系統里，那些能够使这个系統里某些或全部結构性性質保持不变的变換，总是值得研究的。虽然我們并不預备詳尽地討論在測度論中出現的全部变換，我們却将在本节內介紹一些它們的基本性質。

定义在集 X 上而在集 Y 中取值的函数 T 称为**变換**。集 X 称为 T 的**定义域**；Y 中一切形如 $T(x)$ 的点組成的集，其中 $x\in X$，称为 T 的**变程**。以 X 为定义域而变程在 Y 中的变換常称为 **X 在 Y 中的变換**；如果变程就是 Y，則称 T 是 **X 在 Y 上的变換**。对于 X 的每一个子集 E，E 在 Y 中的变換 T 的变程称为 E 对于 T 的**映像**，記为 $T(E)$；对于 Y 的每一个子集 F，X 中映像屬于 F 的一切点組成的集称为 F 对于 T 的**原像**，記为 $T^{-1}(F)$，即

$$T^{-1}(F)=\{x: T(x)\in F\}.$$

設 T 是一个变換，如果 $T(x_1)=T(x_2)$ 当而且只当 $x_1=x_2$ 时，則称 T 是一个**一一变換**。一一变換 T 的**逆变換**，記为 T^{-1}，就是这样一个变換：对于 T 的变程中的每一个 $y=T(x)$，这个变換由等式 $T^{-1}(y)=x$ 确定。

設 T 是 X 在 Y 中的变換，S 是 Y 在 Z 中的变換，則由等式 $(ST)(x)=S(T(x))$ 确定的 X 在 Z 中的变換 ST 称为 S 和 T 的**乘积**。

設 T 是 X 在 Y 中的变換，則对于定义在 Y 上的每一个函数 g，可以指定一个定义在 X 上的函数 f；f 由等式 $f(x)=g(T(x))$ 定义，簡記为 $f=gT$。

定理 1. 設 T 是 X 在 Y 中的变換，g 是定义在 Y 上的函数，M 是 g 的值所在的空間的任何子集，則

$$\{x: (gT)(x)\in M\}=T^{-1}(\{y: g(y)\in M\}).$$

証明。下面四个命題是互相等价的：

(a) $$x_0\in\{x: (gT)(x)\in M\},$$

(b) $$g(T(x_0))\in M,$$

(c) $$若 y_0=T(x_0),\quad 則\ g(y_0)\in M,$$

(d) $$T(x_0)\in\{y: g(y)\in M\}.$$

(a) 与 (d) 等价恰好就是定理的結論。 ▌

設 $(X, \mathbf{S})$ 和 $(Y, \mathbf{T})$ 是可測空間，T 是 X 在 Y 中的变換，我們应該怎样定义 T 的可測性呢？考虑 Y 为数直綫的特殊情形，由于这种特殊情形的啓發，我們定义**可測变換**如下：如果每一个可測集的原像是可測集，則称 T 是可測变換。我們注意到，这个定义与我們以前引进的可測函数的定义是不一致的；由于实数 0 所扮演的特殊的角色，一个可測函数不一定是一个可測变換。但是这样来定义可測变換，在应用上却是十分方便的；只要我們正确地运用“函数”和“变換”两个术語，就不致于發生任何混淆。在 X 本身屬于 $\mathbf{S}$ 而 Y 是数直綫的情形，可測变換与可測函数这两个概念相合。

設 T 是 $(X, \mathbf{S})$ 在 $(Y, \mathbf{T})$ 中的可測变換，我們以記号 $T^{-1}(\mathbf{T})$ 表示由一切形如 $T^{-1}(F)$ 的 X 的子集組成的类，其中 $F\in\mathbf{T}$；显然，$T^{-1}(\mathbf{T})$ 是一个被 $\mathbf{S}$ 所包的 σ-环。

定理 2. 設 T 是 $(X, \mathbf{S})$ 在 $(Y, \mathbf{T})$ 中的可測变換，g 是定义在 Y 上的广义实值可測函数，則 gT 对于 σ-环 $T^{-1}(\mathbf{T})$ 为可測。

証明。由定理 1 可知，对于数直綫上的每一个波雷耳集 M，

$$N(gT)\cap(gT)^{-1}(M)=\{x:(gT)(x)\in M-\{0\}\}=$$
$$=T^{-1}(\{y:g(y)\in M-\{0\}\})=T^{-1}(N(g)\cap g^{-1}(M));$$

根据 T 的可測性得到

$$N(gT)\cap(gT)^{-1}(M)\in T^{-1}(\mathbf{T}).\ \blacksquare$$

設 T 是 $(X,\mathbf{S})$ 在 $(Y,\mathbf{T})$ 中的可測变換，則对于定义在 $\mathbf{S}$ 上的每一个集函数 μ，可以指定一个定义在 $\mathbf{T}$ 上的集函数 ν；对于 $\mathbf{T}$ 中每一个 F，ν 由等式 $\nu(F)=\mu(T^{-1}(F))$ 定义，簡記为 $\nu=\mu T^{-1}$.

定理 3. 設 T 是測度空間 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 在可測空間 $(Y,\mathbf{T})$ 中的可測变換，g 是定义在 Y 上的广义实值可測函数，則等式

$$\int g\,d(\mu T^{-1})=\int(gT)\,d\mu$$

按照下述意义成立：如果两个积分中任意一个存在，則另一个也存在，并且二者相等。

証明。只須考虑非負函数 g. 如果 g 是 Y 的一个可測子集 F 的特征函数，則由定理 1，gT 是 $T^{-1}(F)$ 的特征函数，因此

$$\int g\,d(\mu T^{-1})=(\mu T^{-1})(F)=\mu(T^{-1}(F))=\int(gT)\,d\mu.$$

根据这个关系式可知，如果 g 是一个簡单函数，則定理的結論成立。在一般的場合，令 $\{g_n\}$ 为收斂到 g 的一个簡单函数的增叙列；于是 $\{g_nT\}$ 是收斂到 gT 的一个簡单函数的增叙列，取極限即得定理的結論。 $\blacksquare$

沿用定理 3 中的記号，如果 F 是 Y 的一个可測子集，則对于函数 $\chi_F g$ 应用定理 3 可得关系式

$$\int_F g(y)\,d\mu T^{-1}(y)=\int_{T^{-1}(F)} g(T(x))\,d\mu(x).$$

我們注意到，只要形式地以 $y=T(x)$ 代入上列等式的任何一端，就可以得到等式的另外一端。

定理 4. 設 T 是測度空間 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 在全 σ-有限測度空間 $(Y,\mathbf{T},\nu)$ 中的可測变換，使得 μT^{-1} 对于 ν 是絕对連續的，則在 Y

上存在非負可测函数 ϕ, 使得对于每一个可测函数 g, 等式

$$\int g(T(x))d\mu(x)=\int g(y)\phi(y)d\nu(y)$$

按照下述意义成立：如果两个积分中任意一个存在，則另一个也存在，并且二者相等。

这里的函数 ϕ 相当于多重积分变換理論中的函数行列式（更确切地說，相当于函数行列式的絕对值）。

証明。令

$$\phi=\frac{d(\mu T^{-1})}{d\nu}$$

（参看 §32），然后对定理 3 的結果应用 §32 定理 2。 ▌

設 T 是可测空間 $(X, \mathbf{S})$ 在可测空間 $(Y, \mathbf{T})$ 上的一一变換，如果 T 和 T^{-1} 都是可測的，則称 T 是**保持可测性**的变換，簡称为**保测性变換**。設 T 是測度空間 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 在測度空間 $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ 上的保測性变換，如果 $\mu T^{-1}=\nu$，則称 T 是**保持測度**的变換，簡称为**保測变換**。

(1) 两个可测变換的乘积是可测变換。

(2) 設 T 是 $(X, \mathbf{S})$ 在 $(Y, \mathbf{T})$ 中的可测变換，f 是定义在 X 上对于 $T^{-1}(\mathbf{T})$ 为可測的函数，則当 $T(x_1)=T(x_2)$ 时有 $f(x_1)=f(x_2)$。（提示：如果 F_1 是 Y 中包含 $T(x_1)$ 的一个可测集，則存在 Y 中的可測集 F 使得

$$\{x: f(x)=f(x_1)\}\cap T^{-1}(F_1)=T^{-1}(F).$$

由 $x_1\in T^{-1}(F)$ 可以导出 $x_2\in T^{-1}(F)$。）

(3) 設 T 是 $(X, \mathbf{S})$ 在 $(Y, \mathbf{T})$ 上的可测变換，f 是定义在 X 上对于 $T^{-1}(\mathbf{T})$ 为可測的实值函数，則在 Y 上存在唯一的一个可測函数 g 使得 $f=gT$.（提示：根据 (2)，对于每一个 $y=T(x)$，g 由等式 $g(y)=f(x)$ 無歧义地确定。对于数直綫上每一个波雷耳集 M，我們有

$$T^{-1}(\{y: g(y)\in M\})=\{x: f(x)\in M\},$$

又因 $T(X)=Y$，所以 $N(g)\cap\{y: g(y)\in M\}\in\mathbf{T}$.）如果 T 将 X 映入 Y，結論是否成立？

(4) 設 $X=Y=$单位区間, $\mathbf{S}=$全体波雷耳集类, $\mathbf{T}=$全体可列集类. 如果变换 T 由等式 $T(x)=x$ 确定, 則 T 是 X 在 Y 上的一个一一可測变换, 但 T 并非保測性变换. 如果 $(X, \mathbf{S})=(Y, \mathbf{T})$, 能不能构造这样的一个例子?

(5) 設 T 是 $(X, \mathbf{S})$ 在 $(Y, \mathbf{T})$ 中的可測变换, μ 和 ν 是 $\mathbf{S}$ 上的两个測度使得 $\nu \ll \mu$, 則 $\nu T^{-1} \ll \mu T^{-1}$.

§40. 測 度 环

設有一个在通常代数意义下的环, 如果它的每一个元素都是冪等的, 則称这个环为**布尔环**. 換一句話說, 布尔环就是一个集 $\mathbf{R}$, 对于 $\mathbf{R}$ 中每一对元素, 定义有两种代数运算 (称为加法和乘法), 滿足下列条件:

(a) 加法和乘法都适合交換律和結合律, 乘法对于加法的分配律成立.

(b) 在 $\mathbf{R}$ 中存在一个唯一确定的元素 (記为 0), 使得任意元素 E 与 0 的和*仍为 E.

(c) 对于任意一个元素 E, E 与 E 的和为 0.

(d) 对于任意一个元素 E, E 与 E 的积*为 E.

布尔环的一个典型的例子就是由集 X 的子集組成的一个环, 而以 $E \Delta F$ 和 $E \cap F$ 分别表示 E 和 F 的和与积. 布尔环这个概念的引进, 完全是由于受到以集为元素的环的啓發, 所以我們以后在任何布尔环中都将以 Δ 和 $\cap$ 分别表示加法和乘法.

关于以集为元素的环, 我們引进了一些概念并建立了一些理論, 这些概念和理論絕大部分都可以毫無更改地用在一般的布尔环的場合. 特别是, 如果併与差的运算分别由等式

$$E \cup F=(E \Delta F) \Delta (E \cap F)$$

---

*这里的"和"与"积"指的是两个元素經过布尔环中加法与乘法运算而得到的元素.

和

$$E-F=E\Delta(E\cap F)$$

定义，則这些运算对于布尔环中的元素来説，适合与集的运算在形式上完全相同的等式。关于包含关系 $E\subset F$ 和 $E\supset F$，分别由等式

$$E\cap F=E \quad 和 \quad E\cap F=F$$

定义，类似的論点也成立。

我們記得，任何集类的併集就是包含全体集的最小集，而交集則是被全体集所包的最大集；在一个布尔环中，同样的論点对于併与交也成立（只要併与交能够形成）。例如，若 E 和 F 是布尔环 **R** 的元素，則 $E\cup F$ 的确就是包含 E 和 F 的最小元素；换一句話説，我們有 $E\subset E\cup F$，$F\subset E\cup F$，并且如果 G 是 **R** 中滿足关系式 $E\subset G$ 和 $F\subset G$ 的元素，則必有 $E\cup F\subset G$。然而，对于布尔环中元素的無限集，却不一定有任何元素能够包含这个集的全体元素；即使有，也不一定有最小的。

設 **S** 是一个布尔环，如果 **S** 中元素的每一个可列集具有併集，則称 **S** 是一个**布尔 σ-环**；容易驗証，布尔 σ-环中元素的每一个可列集具有交集。由集 X 的子集組成的一个 σ-环就是布尔 σ-环的一个典型的例子。

如果在布尔环 **R** 中存在一个异于 0 的元素（記为 X）使得对于 **R** 中每一个 E 有 $E\subset X$，則称 **R** 为**布尔代数**。一个布尔 σ-环如果同时是一个布尔代数，則称为**布尔 σ-代数**。

对于定义在布尔环上的函数来説，可加性、測度、σ-有限性等概念的定义，与定义在以集为元素的环上的集函数的对应定义相同。設 μ 是定义在布尔环上的測度，如果 μ 的值只在零元素上为零，則称 μ 是一个**正測度**。

設 **S** 是由集 X 的子集組成的一个 σ-环。定义在 **S** 上的測度 μ 通常不是正測度。但是我們可以借助于几种熟知的方法从 μ 作

出一个正測度。一种方法是考虑測度为零的可測集类 N，注意到 N 是环 S 的理想子环（这些术語都按照通常代数学的意义来了解），然后以因子环 S/N 来代替 S。另外一种等效的方法是，对于滿足条件 $\mu(E\Delta F)=0$ 的集 E 和 F，記为 $E\sim F$，注意到关系“$\sim$”具有自反性，对称性和推移性，然后将 S 换为对于关系 $\sim$ 的一切等价类的集。

但是在測度論中最常用和最便利的方法却是另外一种，我們要采用的也正是这一种方法。因为我們要考虑的布尔 σ-环将以可測集为元素，所以我們不預备以其他的系統来代替 S。我們現在对相等的概念重新給以定义；如果 S 中二集 E 和 F 滿足关系式 $\mu(E\Delta F)=0$，則我們将 E 和 F 看作相等而記为 $E=F[\mu]$。設 $E_n=F_n[\mu]$，$n=1,2,\cdots$，則有

$$E_1-F_1=E_2-F_2 \quad \text{和} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n[\mu];$$

由此可見，即使在新的相等的意义下，对于集論的两种通常的运算来說，S 仍然形成一个布尔 σ-环。設 $E=F[\mu]$，則 $\mu(E)=\mu(F)$，因此在新的相等的意义下，測度 μ 在 S 上仍是無歧义地确定的。又因关系式 $\mu(E)=0$ 和 $E=0\,[\mu]$ 显然是等价的，所以在新的相等的意义下，μ 变成了一个正測度。

設 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 是一个測度空間，我們以記号 $\mathbf{S}(\mu)$ 表示具有上述对于 μ 为相等的意义的 σ-环 S。

設 S 是一个布尔 σ-环，在 S 上定义有一个正測度 μ，則称 S 是一个**測度环**，記为 $(\mathbf{S},\mu)$。上面的討論說明，如果 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 是一个測度空間，則 $(\mathbf{S}(\mu),\mu)$ 是一个測度环；我們称这个測度环为与 X **連带**的測度环，或簡称为 X 的測度环。一个布尔代数如果同时是一个測度环，則称为**測度代数**。如同对于測度空間一样，对于測度环和測度代数我們也将以同样的意义引用［全］有限和 σ-有限这些术語。

設 $(\mathbf{S},\mu)$ 和 $(\mathbf{T},\nu)$ 是两个測度环，如果 T 是 S 在 T 上的一个

一一变换，使得对于 $\mathbf{S}$ 的任意元素 E, F 和 E_n，$n=1,2,\cdots$，有

$$T(E-F)=T(E)-T(F),$$
$$T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty} T(E_n)$$

和

$$\mu(E)=\nu(T(E)),$$

則称 T 是 $(\mathbf{S},\mu)$ 和 $(\mathbf{T},\nu)$ 之間的一个**同构**。如果两个测度环之間存在一个同构，則称这两个测度环是**同构的**。設 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 和 $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ 是两个測度空間，如果与它們連带的測度环 $(\mathbf{S}(\mu),\mu)$ 和 $(\mathbf{T}(\nu),\nu)$ 是同构的，則称測度空間 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 和 $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ 是同构的。

設 E 是測度环 $(\mathbf{S},\mu)$ 的一个异于 0 的元素，如果当 $F\subset E$ 时有 $F=0$ 或 $F=E$，二者必居其一，則称 E 是測度环 $(\mathbf{S},\mu)$ 的**原子**［或測度 μ 的原子］；不含原子的測度环称为**缺原子的**。設 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 是一个測度空間，如果它的測度环是缺原子的，則測度空間 X 和測度 μ 都称为缺原子的。

設 $(\mathbf{S},\mu)$ 是一个測度环，我們以記号 $\mathcal{S}$［或 $\mathcal{S}(\mu)$］表示 $\mathbf{S}$ 中一切具有有限測度的元素的集；对于 $\mathcal{S}$ 中任意两个元素 E 和 F，我們采用下列記号：

$$\rho(E,F)=\mu(E\Delta F)。$$

容易驗証，函数 ρ 是 $\mathcal{S}$ 的一个度量；我們称 $\mathcal{S}$ 为与 $(\mathbf{S},\mu)$ **連带的度量空間**，或簡称为 $(\mathbf{S},\mu)$ 的度量空間。設 $(\mathbf{S}(\mu),\mu)$ 是測度空間 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 的測度环，記号 $\mathcal{S}(\mu)$ 也将用来表示与 $(\mathbf{S}(\mu),\mu)$ 連带的度量空間。如果与測度环或測度空間連带的度量空間是可分的，則称这个測度环或測度空間是**可分的**。

定理 1. 設 $\mathcal{S}$ 是測度环 $(\mathbf{S},\mu)$ 的度量空間，并設

$$f(E,F)=E\cup F \qquad \text{和} \qquad g(E,F)=E\cap F,$$

則 f, g 和 μ 对于它們的主目元来說，都是一致連續的函数。

証明。由关系式

$$\left.\begin{matrix}\mu((E_1\cup F_1)-(E_2\cup F_2))+\mu((E_2\cup F_2)-(E_1\cup F_1))\\ \mu((E_1\cap F_1)-(E_2\cap F_2))+\mu((E_2\cap F_2)-(E_1\cap F_1))\end{matrix}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\mu(E_1-E_2)+\mu(F_1-F_2)+\mu(E_2-E_1)+\mu(F_2-F_1)$$

和

$$|\mu(E)-\mu(F)|=|\mu(E-F)-\mu(F-E)|\leqslant$$
$$\leqslant\mu(E-F)+\mu(F-E)$$

立即可得定理的結論。▌

定理 2. 設 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 是一个 σ-有限測度空間，其中 $\mathbf{S}$ 是能够由一个可列类产生的 σ-环，則測度为有限的全体可測集的度量空間 $\mathcal{S}(\mu)$ 是可分的。

証明。設 $\{E_n\}$ 是 $\mathbf{S}$ 中集的一个叙列使得 $\mathbf{S}=\mathbf{S}(\{E_n\})$。由于 μ 是 σ-有限的，所以，对于每一个 $n=1, 2, \cdots$，我們可以假定 $\mu(E_n)<\infty$，而不致丧失普遍性。根据 §5 定理 3，由 $\{E_n\}$ 产生的环也是可列的，因此我們又可以假定集类 $\{E_n: n=1, 2, \cdots\}$ 是一个环。于是根据 §13 定理 4 可知，对于 $\mathcal{S}(\mu)$ 中每一个 E 并对于每一个正数 ε，存在正整数 n 使得 $\rho(E, E_n)<\varepsilon$。这就說明了一个可列集在 $\mathcal{S}(\mu)$ 中稠密，定理于是証明完畢。▌

(1) 測度空間 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 的度量空間 $\mathcal{S}$ 是完备空間.（提示：如果 $\{E_n\}$ 是 $\mathcal{S}$ 中的一个基本叙列，χ_n 是 E_n 的特征函数，$n=1, 2, \cdots$，則 $\{\chi_n\}$ 是依測度基本的，于是可以应用 §22 定理 5.）

(2) 測度环的度量空間是不是完备空間?

(3) 关于布尔环也有一个完备性的概念；这个概念与度量空間的完备性概念有关，但二者并不相同．設 $\mathbf{R}$ 是一个布尔环，如果 $\mathbf{R}$ 的每一个子集 $\mathbf{E}$ 具有併集，則称 $\mathbf{R}$ 是**完备**的．显然，每一个完备布尔环必定是一个布尔 σ-代数；反之，每一个全有限測度代数是完备的．（提示：設 $\tilde{\mathbf{E}}$ 是由 $\mathbf{E}$ 中元素的一切有限併組成的集．令 $\alpha=\sup\{\mu(E): E\in\tilde{\mathbf{E}}\}$，选取 $\tilde{\mathbf{E}}$ 中元素的一个叙列 $\{E_n\}$ 使得 $\lim_n\mu(E_n)=\alpha$，并令 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$.）

(4) 对于全 σ-有限測度代数，(3) 中的結論也成立.

(5) 設 ρ 是測度环 $(\mathbf{S}, \mu)$ 的度量空間 $\mathcal{S}$ 上的度量，則当 E, F 和 G 都

是 $\mathcal{S}$ 中的元素时，有 $\rho(E\Delta F,\ F\Delta G)=\rho(E,F)$.

(6) 設 T 是測度环 $(\mathbf{S},\mu)$ 在測度环 $(\mathbf{T},\nu)$ 上的一一变换，使得当 E 和 F 都屬于 $\mathbf{S}$ 时，有

$$T(E-F)=T(E)-T(F),$$
$$T(E\cup F)=T(E)\cup T(F)$$

和

$$\mu(E)=\nu(T(E)),$$

則 T 是一个同构.

(7) 設 T 是測度环 $(\mathbf{S},\mu)$ 在測度环 $(\mathbf{T},\nu)$ 上的一一变换，滿足下列条件：

$$\mu(E)=\nu(T(E)), \qquad E\subset F,$$

当而且只当 $T(E)\subset T(F)$，則 T 是一个同构.

(8) 設 $\mathcal{S}$ 是以 ρ 为其度量的度量空間，如果对于 $\mathcal{S}$ 中任意两个相异的元素 E 和 F，存在异于 E 和 F 的元素 G 使得

$$\rho(E,F)=\rho(E,G)+\rho(G,F),$$

則称度量空間 $\mathcal{S}$ 是凸的. σ-有限測度环的度量空間为凸的必要和充分条件是：这个測度环是缺原子的.

(9) 两个測度环之間的同构是它們的度量空間之間的等距变換.

(10) 全 σ-有限測度环最多有可列無限多个原子.

(11) 設 $\mathcal{S}$ 是測度空間 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 的度量空間，ν 是定义在 $\mathbf{S}$ 上的有限測度使得 $\nu\ll\mu$，則函数 ν 在 $\mathcal{S}$ 上是無歧义地确定的，并且是連續的.

(12) 設 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 是 σ-有限測度空間. 如果 $\{\nu_n\}$ 是定义在 $\mathbf{S}$ 上的有限广义測度的一个叙列，其中每一个 ν_n 对于 μ 是絕对連續的，并且对于 $\mathbf{S}$ 中每一个 E，$\lim_n \nu_n(E)$ 存在且为有限，則集函数 ν_n 对于 μ 是一致絕对連續的.（提示：設 $\mathcal{S}$ 是 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 的度量空間. 对于每一个固定的正数 ε，令

$$\mathcal{E}_k=\bigcap_{n=k}^{\infty}\bigcap_{m=k}^{\infty}\left\{E:\ E\in\mathcal{S}, \qquad \left|\nu_n(E)-\nu_m(E)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\right\}.$$

根据 (11)，每一个 $\mathcal{E}_k$ 是一个閉集，又由 (1)，$\mathcal{S}$ 是一个完备度量空間，因此应用关于集的范疇的貝尔定理可知，存在正整数 k_0 和正数 r_0，并存在 $\mathcal{S}$ 中的集 E_0，使得 $\{E:\ \rho(E,\ E_0)<r_0\}\subset\mathcal{E}_{k_0}$. 現在設 δ 是一个正数使得 $\delta<r_0$,

并使得对于 $\mu(E)<\delta$ 和 $n=1,\cdots,k_0$ 有 $|\nu_n(E)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 不难看出，当 $\mu(E)<\delta$ 时有

$$\rho(E_0-E,E_0)<r_0,\qquad \rho(E_0\cup E,E_0)<r_0$$

和

$$|\nu_n(E)|\leqslant|\nu_{k_0}(E)|+|\nu_n(E_0\cup E)-\nu_{k_0}(E_0\cup E)|+$$
$$+|\nu_n(E_0-E)-\nu_{k_0}(E_0-E)|.)$$

(13) 沿用 (12) 中的記号，如果 $\nu(E)=\lim_n \nu_n(E)$, 則 ν 是一个有限广义測度，并且 $\nu\ll\mu$.

(14) 設 $\{\nu_n\}$ 是有限广义測度的叙列，使得对于每一个可測集 E, $\lim_n\nu_n(E)=\nu(E)$ 存在且为有限，則 $\nu(E)$ 是一个广义測度.（提示：設 $|\nu_n(E)|\leqslant c_n$, $n=1,2,\cdots$; 令

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n c_n}|\nu_n|(E),$$

并应用 (13).)

(15a) 設 R 是任意布尔环，則 R 与某集 X 的子集組成的环是同构的（在通常代数学的意义下).（提示：考虑由 0 与 1 两个元素組成的布尔代数 R_0, 并設 X 是由 R 在 R_0 中的一切同态組成的集. 对于 R 中每一个 E, 令

$$T(E)=\{x:\ x\in X,\ x(E)=1\},$$

則 T 是 R 在 X 的全体子集組成的代数中的一个同态；剩下需要証明的是：若 $E\in$ R 并且 $E\neq 0$, 則存在 X 中的 x 使得 $x(E)=1$. 如果 R 是有限的，这个結果显然成立. 在一般的場合，設 X^* 是由定义在 R 上而在 R_0 中取值的一切函数組成的集；对通常乘积拓扑而言，X^* 是一个紧豪司道夫空間. 設 $\tilde{R}$ 是 R 的有限子环，并且 $E\in\tilde{R}$; $X^*(\tilde{R})$ 是 X^* 中一切具有下述性質的函数 x^* 組成的集：x^* 是定义在 $\tilde{R}$ 上的同态，并且 $x^*(E)=1$. 于是关系式

$$\bigcap_{i=1}^{n}X^*(\tilde{R}_i)\supset X^*(\tilde{R})$$

(其中 $\tilde{R}$ 是由 $\tilde{R}_1,\cdots,\tilde{R}_n$ 产生的环）說明了集类 $\{X^*(\tilde{R})\}$ 具有有限交的性質.）这个結果称为**斯东定理.**

(15b) 上面所述斯东定理的証明，說明了 R 与紧豪司道夫空間中又开又閉的集組成的一个环是同构的. 如果 R 是布尔代数，則 R 与紧豪司道夫

空間中一切又开又閉的集組成的环是同构的. (提示: 将 (15a) 中的記号略加更改. 設 X 是由 R 在 R_0 中具有下述性質的一切同态組成的集: 这些同态将 R 的最大元素映成 1. 于是, 在变换 T 之下 R 的映像包含了 X 的拓扑結构的一个基. 如果紧豪司道夫空間的一个又开又閉子集类是一个基, 并且封閉于有限併的运算, 則这个类包含一切又开又閉的集.)

(15c) 設 S 是任意布尔 σ-代数, 則 S 与某集 X 的子集組成的以一个 σ-理想子环为模的 σ-代数是同构的. (提示: 設 X 是一个紧豪司道夫空間, T 是一个代数学的同构, 它将 S 映为 X 中一切又开又閉的集組成的代数; 又設 S_0 是由 X 的一切又开又閉子集类产生的 σ-环, N_0 是 S_0 中一切屬于第一种范疇的集类. 如果 $\{E_n\}$ 是又开又閉集的一个叙列, 我們令 $E=T(\bigcup_{n=1}^{\infty}T^{-1}(E_n))$; 于是, $E-\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 是一个無处稠密集. 换一句話說, 一切又开又閉的集組成的类对于可列併的运算是封閉的 (模 N_0). 尙待証明的是: N_0 不包含任何非空的又开又閉集; 这样就可以保証, 在以 N_0 为模的情况下, T 仍然是一个同构. 然而上述命題乃是关于集的范疇的貝尔定理的一个特殊情形; 而貝尔定理对于局部紧空間成立, 正如同对于完备度量空間一样.)

§41. 关于同构的定理

本节的目的是要說明, 測度环的概念并不是像看起来这样普遍的一个概念. 事实上, 我們将要証明, 在一些不太严的条件下, 每一个測度环是某个測度空間的測度环. 关于这一类的定理为数頗多, 我們只預备挑选其中比較特殊的一个加以討論, 这一个無論在历史上或在現今的应用上都有其重要性.

以下我們限于討論全有限測度代数. 設 (S,μ) 是一个全有限測度代数; 如果沒有特別的声明, 記号 X 将用来表示 S 的最大元素. 如果 $\mu(X)=1$, 則代数 S 和測度 μ 都称为**正規化的**. 設 E 是 S 的一个元素, P 是 S 中不相交元素的有限集, 以 E 为併集, 則称 P 是 E 的一个**分割**. 分割 $\mathrm{P}=\{E_1,\cdots,E_k\}$ 的**模**指的是 $\mu(E_1),\cdots,\mu(E_k)$ 諸数中的最大者, 記为 $|\mathrm{P}|$. 設 $\mathrm{P}=\{E_1,\cdots,E_k\}$ 是 E 的一

个分割，F 是 $\mathbf{S}$ 中被 E 所包的任意元素，我們以記号 $\mathbf{P}\cap F$ 表示 F 的分割 $\{E_1\cap F, \cdots, E_k\cap F\}$。

設 $\mathbf{P}_1$ 和 $\mathbf{P}_2$ 是两个分割，如果 $\mathbf{P}_1$ 的每一个元素被 $\mathbf{P}_2$ 的某个元素所包，則記为 $\mathbf{P}_1\leqslant\mathbf{P}_2$。設 $\{\mathbf{P}_n\}$ 是分割的叙列，如果 $\mathbf{P}_{n+1}\leqslant\mathbf{P}_n$，$n=1,2,\cdots$，則称 $\{\mathbf{P}_n\}$ 是遞減的。設 $\{\mathbf{P}_n\}$ 是分割的叙列，如果对于 $\mathbf{S}$ 中每一个元素 E 并对于每一个正数 ε，存在正整数 n 并存在 $\mathbf{S}$ 中的元素 E_0，使得 $\mathbf{P}_n$ 的某些元素以 E_0 为其併集，并使得 $\rho(E, E_0)=\mu(E\Delta E_0)<\varepsilon$，則称 $\{\mathbf{P}_n\}$ 是稠密的。

定理 1. 設 $(\mathbf{S},\mu)$ 是全有限，缺原子的測度代数，并設 $\{\mathbf{P}_n\}$ 是 X 的分割的稠密遞減叙列，則 $\lim_n|\mathbf{P}_n|=0$。

証明。因为 $\{|\mathbf{P}_n|\}$ 是遞減的正数列，所以必有極限；假定这个極限是一个正数 δ，我們将由此导出矛盾。

設 $\mathbf{P}_1=\{E_1, \cdots, E_k\}$，則元素 E_i 中至少有一个能使

$$|\mathbf{P}_n\cap E_i|\geqslant\delta, \qquad n=1,2,\cdots.$$

令 F_1 为具有上述性質的一个元素，并考察 F_1 的分割的叙列 $\{\mathbf{P}_n\cap F_1\}$。重复上面引用的論点，我們可以找到分割 $\mathbf{P}_2$ 的一个元素 F_2，使得 $F_2\subset F_1$ 并且

$$|\mathbf{P}_n\cap F_2|\geqslant\delta, \qquad n=1,2,\cdots.$$

这样繼續做下去，以至無穷。

令 $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$，則 $\mu(F)\geqslant\delta>0$；由于 F 不是一个原子，因此，存在元素 F_0 使得 $F_0\subset F$ 并且

$$0<\mu(F_0)<\mu(F).$$

我們注意到，元素 F_0 或者被每一个 $\mathbf{P}_n$ 的每一个元素所包含，$n=1,2,\cdots$，或者和它們都不相交。由此可見，如果 ε 是比 $\mu(F_0)$ 和 $\mu(F)-\mu(F_0)$ 二数之一为小的一个数，則 $\mathbf{S}$ 中的元素若为上述分割 $\mathbf{P}_n$ 中元素的併集，它和 F_0 之間就不可能具有小于 ε 的距离。这个事实与 $\{\mathbf{P}_n\}$ 为稠密的假設条件相矛盾，定理于是証明完畢。 ▌

定理 2. 設 Y 是单位区間，$\mathbf{T}$ 是 Y 的全体波雷耳子集类，ν 是 $\mathbf{T}$ 上的勒貝格测度。如果 $\{\mathbf{Q}_n\}$ 是测度代数 $(\mathbf{T},\nu)$ 的最大元素 Y 的一个分割叙列，其中 $\mathbf{Q}_n$ 是区間集，并滿足条件 $\lim_n|\mathbf{Q}_n|=0$，則 $\{\mathbf{Q}_n\}$ 是稠密的。

証明。对于每一个正数 ε，存在正整数 n 使得 $|\mathbf{Q}_n|<\frac{\varepsilon}{2}$。如果 E 是 Y 的任意子区間，令 E_1 为分割 $\mathbf{Q}_n$ 中包含 E 的左端点的区間；显然，E_1 是唯一确定的。如果 E_1 不包含 E 的右端点，令 E_2 为分割 $\mathbf{Q}_n$ 中与 E_1 右端相邻接的区間。这样繼續有限多次，直到得出 $\mathbf{Q}_n$ 中包含 E 的右端点的区間 E_k 为止。区間 $E_1,\cdots,E_k$ 的併集与 E 之間的距离小于 ε；这就說明了 Y 的任何子区間能够以 $\{\mathbf{Q}_n\}$ 的元素的併集来逼近。因为由区間的一切有限併組成的类是稠密的，定理于是証明完畢。▌

定理 3. 每一个可分的缺原子的正規化测度代数 $(\mathbf{S},\mu)$ 与单位区間测度代数 $(\mathbf{T},\nu)$ 是同构的。

証明。設 $\{E_n\}$ 是 $(\mathbf{S},\mu)$ 的度量空間 $\mathcal{S}(\mu)$ 中的一个稠密叙列。对于每一个 $n=1,2,\cdots$，由形如 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ 的元素組成的集是 X 的一个分割 $\mathbf{P}_n$，其中 $A_i=E_i$ 或 $A_i=X-E_i$，$i=1,\cdots,n$。显然，分割叙列 $\{\mathbf{P}_n\}$ 是遞減的；又由于 $\{E_n\}$ 在 $\mathcal{S}(\mu)$ 中稠密，所以 $\{\mathbf{P}_n\}$ 是稠密的。根据定理 1 可知，$\lim_n|\mathbf{P}_n|=0$。

对于分割 $\mathbf{P}_1$ 的每一个元素 E，我們以 Y 的一个子区間 $T(E)$ 与之对应，使得 $\mu(E)=\nu(T(E))$，并使得这些区間构成 Y 的一个分割。对于每一个这样的区間，我們再按照类似的方式将它分解成为对应于分割 $\mathbf{P}_2$ 中元素的子区間，并且依此类推下去。于是我們得到了将 Y 分解成区間的一个分割叙列 $\{\mathbf{Q}_n\}$；由于变换 T 是将 $\{\mathbf{P}_n\}$ 的分割元素变为区間的保测变换，于是有 $\lim_n|\mathbf{Q}_n|=0$，根据定理 2 可知，$\{\mathbf{Q}_n\}$ 是稠密的。

如果我們不仅对在 $\{\mathbf{P}_n\}$ 中出現的分割元素定义 T，并且也对这些元素的有限併按照下列方式定义 T：对于每一个这样的有

限倂，以 $\{Q_n\}$ 中分割元素的对应有限倂与之对应，则变换 T 是度量空間 $\mathcal{S}(\mu)$ 的一个稠密子集在 $\mathcal{T}(\nu)$ 的一个稠密子集上的等距变换，其中 $\mathcal{T}(\nu)$ 是测度代数 $(\mathbf{T},\nu)$ 的度量空間. 由此可見，存在 $\mathcal{S}(\mu)$ 在 $\mathcal{T}(\nu)$ 上的唯一等距变换 $\overline{T}$，它在 T 有定义的地方处处与 T 相等. 由于 T 保持倂与差的运算不变，又由于这些运算对于它們的主目元来説是一致連續的函数，所以 $\overline{T}$ 是一个同构. ▎

(1) 設 $(\mathbf{S},\mu)$ 是一个 σ-有限，缺原子的测度环，并且 $E_0\in\mathbf{S}$，$E_0\neq 0$，则对于每一个正数 ε，存在 $\mathbf{S}$ 中的元素 E，使得 $E\subset E_0$ 并使得 $0<\mu(E)<\varepsilon$. (提示：如果 $\mu(E_0)<\infty$，并且 E_1 是 $\mathbf{S}$ 的一个元素使得 $E_1\subset E_0$ 和 $0<\mu(E_1)<\mu(E_0)$，则有 $\mu(E_1)\leqslant\frac{1}{2}\mu(E_0)$ 或 $\mu(E_0-E_1)\leqslant\frac{1}{2}\mu(E_0)$，二者必居其一.)

(2) 設 $(\mathbf{S},\mu)$ 是一个 σ-有限，缺原子的测度环，并且 $E_0\in\mathbf{S}$，则对于满足关系式 $0\leqslant\alpha\leqslant\mu(E_0)$ 的每一个广义实数 α，存在 $\mathbf{S}$ 中的元素 E，使得 $E\subset E_0$ 并使得 $\mu(E)=\alpha$. (提示：当 $\alpha=\infty$ 时，命題显然成立，因此我們可以假定 $\mu(E_0)<\infty$ 而不致丧失普遍性. 命題的結論可以利用超限穷举法得出. 这个方法与通常用来証明"完备凸度量空間中的任意两点可以用一条綫段連接起来"这个定理的方法类似. 事实上，我們現在这个命題就是上述度量几何学中一般定理的特殊情形(参看 40.2 和 40.8).)

(3) 設 $(\mathbf{S},\mu)$ 是全 σ-有限，缺原子的测度代数，并且 $E_0\in\mathbf{S}$，则对于满足关系式 $\mu(E_0)\leqslant\alpha\leqslant\mu(X)$ 的每一个广义实数 α，存在 $\mathbf{S}$ 中的元素 E，使得 $E_0\subset E$ 并使得 $\mu(E)=\alpha$. (提示：当 α 为有限时，对 $X-E_0$ 和 $\mu(X)-\alpha$ 应用(2).)

(4) 設 $(\mathbf{S},\mu)$ 是全有限测度代数，则由测度 μ 的一切值組成的集是一个閉集.

(5) 設 σ-有限，缺原子的测度环 $(\mathbf{S},\mu)$ 中至少有一个异于 0 的元素，则它的度量空間 $\mathcal{S}(\mu)$ 中沒有孤立点. 反之，如果 $\mathcal{S}(\mu)$ 中沒有孤立点，则 $(\mathbf{S},\mu)$ 是否一定是缺原子的?

(6) 每一个可分的，缺原子的全 σ-有限测度代数 $(\mathbf{S},\mu)$ 如果具有性質 $\mu(X)=\infty$，必定与数直綫的测度代数 $(\mathbf{T},\nu)$ 是同构的. (提示：由 (2) 知存在 $\mathbf{S}$ 中元素的叙列 $\{X_n\}$ 使得 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$ 并使得 $\mu(X_n)=1$，$n=1,2,\cdots$；

因此，当 n 为任何正整数时，对于由 X_n 中一切元素組成的代数可以应用定理 3.)

(7) 每一个测度代数与一个测度空間的测度代数是同构的（参看 40.15 c).

§42. 函数空間

設 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 是任意测度空間，$\mathcal{S}(\mu)$ 是具有有限测度的可测集空間，則与 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 連带的某些度量空間是和 $\mathcal{S}(\mu)$ 相类似的。由一切广义实值可积函数組成的类 $\mathscr{L}_1$（或 $\mathscr{L}_1(\mu)$）就是这样的一个度量空間。如果对于 $\mathscr{L}_1$ 中的 f 我們采用記号：

$$\|f\|=\int|f|\,d\mu,$$

而对于 $\mathscr{L}_1$ 中的 f 和 g，令 $\rho(f, g)=\|f-g\|$（参看 §23），則一个度量或距离所应具备的一切性質，其中只有一条是函数 ρ 所不能滿足的——就是，当 $\rho(f,g)=0$ 时，不一定有 $f=g$。根据 §25 定理 2，我們知道，$\rho(f,g)=0$ 的意义就是 $f=g[\mu]$。我們将采用与测度为有限的可测集空間情形相同的考虑方式。$\mathscr{L}_1$ 中的两个元素（即函数）将被認为是相等的，如果它們之間的距离为零；或者說，如果它們几乎处处相等$[\mu]$。在这样的了解之下，$\mathscr{L}_1$ 就成了一个度量空間，并且还是一个完备度量空間（参看 §26 定理 2）。

为了分析中的某些目的，我們需要将这些概念加以推广。設 p 是大于 1 的一个实数，我們以 $\mathscr{L}_p$（或 $\mathscr{L}_p(\mu)$）表示使 $|f|^p$ 为可积的一切可测函数 f 組成的类。如同在 $\mathscr{L}_1$ 的場合一样，如果 $\mathscr{L}_p$ 中两个元素几乎处处相等$[\mu]$，我們就認为它們是相等的。在某种程度內，空間 $\mathscr{L}_p$ 的理論与空間 $\mathscr{L}_1$ 的理論是非常相像的。例如，对于 $\mathscr{L}_p$ 中的 f，我們定义

$$\|f\|_p=\left(\int|f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

并且对于 $\mathscr{L}_p$ 中的 f 和 g，令 $\rho_p(f,g)=\|f-g\|_p$。但是到了这里，

我們就遇到了困难。虽然我們有 $\rho_p(f,g)=\rho_p(g,f)\geqslant 0$, 并且 $\rho_p(f,g)=0$ 当而且只当 $f=g[\mu]$, 然而三角形不等式是否成立却不是很明显的了。更严重的是,我們甚至于还不知道 ρ_p 是否永远是有限的。为了克服这些困难,我們首先証明两条經典性的定理;下面这个定理称为**荷德尔不等式**。

定理 1. 設 p 和 q 是两个大于 1 的实数, 滿足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; 如果 $f\in\mathscr{L}_p$, $g\in\mathscr{L}_q$, 则 $fg\in\mathscr{L}_1$, 并且 $\|fg\|\leqslant\|f\|_p\cdot\|g\|_q$。

証明。考虑对于一切正的实数 t 有定义的輔助函数 ϕ:

$$\phi(t)=\frac{t^p}{p}+\frac{t^{-q}}{q}.$$

微分后得到

$$\phi'(t)=t^{p-1}-t^{-q-1};$$

我們看出,只有当 $t=1$ 时 $\phi'(t)$ 才能为零。由于

$$\lim_{t\to 0}\phi(t)=\lim_{t\to\infty}\phi(t)=\infty,$$

所以 ϕ 在 $t=1$ 取極小值,从而有

$$\frac{t^p}{p}+\frac{t^{-q}}{q}=\phi(t)\geqslant\phi(1)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

如果 a 和 b 是两个正数,令

$$t=\frac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{p}}},$$

我們得到

$$1\leqslant\frac{a^{p-1}}{bp}+\frac{b^{q-1}}{aq}\qquad\text{或}\qquad ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},$$

显然,后面一个不等式即使当 a 和 b 为零时仍成立。

我們現在回到定理的証明。若 $\|f\|_p=0$ 或 $\|g\|_q=0$, 定理显然成立。如果 $\|f\|_p$ 和 $\|g\|_q$ 都不为零,可令

$$a=\frac{|f|}{\|f\|_p}\qquad\text{和}\qquad b=\frac{|g|}{\|g\|_q}.$$

应用前面得到的最后一个不等式，我們有

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p\cdot\|g\|_q}\leqslant\frac{1}{p}\,\frac{|f|^p}{\int|f|^p d\mu}+\frac{1}{q}\,\frac{|g|^q}{\int|g|^q d\mu}.$$

因为 fg 是可测的，所以这个不等式已經說明了 $fg\in\mathscr{L}_1$；两边积分后即得定理的結論。▌

下面这个定理称为**閔可夫斯基不等式.**

定理 2. 設 p 是大于 1 的实数，如果 f 和 g 都屬于 $\mathscr{L}_p$，則 $f+g\in\mathscr{L}_p$，并且

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p.$$

証明. 对于由两点构成的測度空間，当两点的測度都为 1 时，应用荷德尔不等式可得下面的初等不等式：

$$|a_1b_1+a_2b_2|\leqslant(|a_1|^p+|a_2|^p)^{\frac{1}{p}}(|b_1|^q+|b_2|^q)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 因此

$$|f+g|^p\leqslant|f|\cdot|f+g|^{p-1}+|g|\cdot|f+g|^{p-1}\leqslant$$
$$\leqslant(|f|^p+|g|^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(2|f+g|^{q(p-1)})^{\frac{1}{q}},$$

从而有

$$|f+g|^p\leqslant 2^{\frac{p}{q}}(|f|^p+|g|^p).$$

这个不等式說明了 $f+g\in\mathscr{L}_p$. 又因为

$$(\|f+g\|_p)^p=\int|f+g|^p d\mu\leqslant$$
$$\leqslant\int|f|\cdot|f+g|^{p-1}d\mu+\int|g|\cdot|f+g|^{p-1}d\mu\leqslant$$
$$\leqslant\left(\int|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int|f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}+$$
$$+\left(\int|g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int|f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}=$$
$$=(\|f\|_p+\|g\|_p)(\|f+g\|_p)^{\frac{p}{q}},$$

由此即可得出定理的結論。▌

由定理 2 可知，如果 f, g 和 h 都屬于 $\mathscr{L}_p$，則

$$\rho_p(f,g)=\|f-g\|_p\leqslant\|f-h\|_p+\|h-g\|_p=$$
$$=\rho_p(f,h)+\rho_p(h,g),$$

所以 $\mathscr{L}_p$ 的确是一个度量空間；从前我們用以証明 $\mathscr{L}_1$ 是完备空間的方法，只須加以很明显的修改，就可以用来証明 $\mathscr{L}_p$ 的完备性。

(1) 測度空間 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 的度量空間 $\mathscr{L}_p(\mu)$ 为可分的必要和充分条件是：具有有限測度的可測集空間 $\mathcal{S}(\mu)$ 是可分的．(提示：如果一个集类在 $\mathcal{S}(\mu)$ 中是稠密的，則这些集的特征函数的具有有理系数的一切有限綫性組合构成一个在 $\mathscr{L}_p(\mu)$ 中稠密的集。)

(2) 另外一个有用的空間就是由一切本性有界的可測函数組成的集 $\mathfrak{M}$．如果对于 $\mathfrak{M}$ 中任意的 f，令

$$\|f\|_\infty=\operatorname{ess\,sup}\ \{|f(x)|:x\in X\},$$

而对于 $\mathfrak{M}$ 中的 f 和 g，令 $\rho_\infty(f, g)=\|f-g\|_\infty$，則 $\mathfrak{M}$（在我們关于两个元素相等的約定之下）形成一个完备度量空間．

(3) 在本节所述的函数空間中，$\mathscr{L}_2$ 是已被研究得最透徹的一个；对于通常有限維的歐几里得空間来說，$\mathscr{L}_2$ 是它的最自然同时也是最富成效的推广．定义在 $\mathscr{L}_2$ 上的实值函数 Λ，如果滿足关系式

$$\Lambda(\alpha f+\beta g)=\alpha\Lambda(f)+\beta\Lambda(g),$$

其中 α, β 是两个实数，f 和 g 都屬于 $\mathscr{L}_2$，則称为 $\mathscr{L}_2$ 上的**綫性泛函数**．設 Λ 是一个綫性泛函数，如果存在正的常数 c 使得对于 $\mathscr{L}_2$ 中每一个 f 有 $|\Lambda(f)|\leqslant c\|f\|_2$，則称 Λ 是**有界**的．

对于每一个有界的綫性泛函数 Λ，必定存在 $\mathscr{L}_2$ 中的元素 g，使当 $f\in\mathscr{L}_2$ 时有

$$\Lambda(f)=\int fg\,d\mu$$

(这是 $\mathscr{L}_2$ 的一个初等的几何性質，它的証明除了用到 $\mathscr{L}_2$ 是完备空間这一事实外，并不依賴于更深的性質)．这个結果可以用来証明拉东-尼古丁定理(同时这个結果又是拉东-尼古丁定理的相当容易的推論)．为了簡单起見，我們只限于在有限測度的場合下列出这个命題的証明的綱要．

設 μ 和 ν 是两个有限測度使得 $\nu\ll\mu$，并令 $\lambda=\mu+\nu$．

(3a) 如果对于$\mathscr{L}_2(\lambda)$中每一个f有

$$\Lambda(f)=\int f d\nu,$$

则Λ是$\mathscr{L}_2(\lambda)$上的一个有界綫性泛函数.

(3b) 如果

$$\Lambda(f)=\int fg d\lambda,$$

则$0\leqslant g\leqslant 1\ [\lambda]$. (提示: 若$f$是可测集$E$的特征函数, 则$\Lambda(f)=\nu(E)\leqslant\lambda(E)$.)

(3c) 如果$E=\{x: g(x)=1\}$, 则$\lambda(E)=0$. (提示: $\lambda(E)=\nu(E)$.)

(3d) 对于每一个非負可測函数f, 有

$$\int f(1-g)d\nu=\int fg d\mu.$$

(3e) 如果$g_0=\frac{g}{1-g}$, 则对于每一个可測集E, 有

$$\nu(E)=\int_E g_0\, d\mu.$$

(提示: 令$f=\frac{\chi_E}{1-g}$.)

(4) 設$(X, \mathbf{S}, \mu)$是一个有限測度空間; 对于任意两个实值可測函数f和g, 令

$$\rho_0(f, g)=\int\frac{|f-g|}{1+|f-g|}d\mu.$$

函数ρ_0是一个度量; 在度量ρ_0的意义下的收斂性与依測度收斂性等价.

§43. 集函数与点函数

在本节中我們将研究单实变数的某些函数与数直綫上的有限測度之間的关系. 在本节中我們假定

X是数直綫, $\mathbf{S}$是全体波雷耳集类, μ是$\mathbf{S}$上的勒貝格測度.

我們将考虑X上的单調非減函数f, 也就是当$x\leqslant y$时恒滿足关系式$f(x)\leqslant f(y)$的函数f; 为了簡单起見, 我們就称这种函数为**单調函数**. 設f是一个有界单調函数, 则容易看出,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad 和 \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

都存在并为有限；我們按照通常的習慣将它們分别記作 $f(-\infty)$ 和 $f(+\infty)$。

定理 1. 設 ν 是 **S** 上的有限測度，如果对于每一个实数 x 令

$$f_\nu(x)=\nu(\{t:\ -\infty<t<x\}),$$

則 f_ν 是一个有界单調函数，从左边連續，并且 $f_\nu(-\infty)=0$。

証明. f_ν 的有界性和单調性可由測度 ν 的对应性質推出。因为 $f_\nu(-n)=\nu((-\infty,-n))$，$n=1,2,\cdots$，所以

$$f_\nu(-\infty)=\lim_n f_\nu(-n)=$$
$$=\nu(\bigcap_{n=0}^{\infty}\{t:\ -\infty<t<-n\})=\nu(0)=0.$$

現在証明，对于任意的 x，f_ν 是左連續的。設 $\{x_n\}$ 是一个增数列使得 $\lim_n x_n=x$；于是

$$0=\nu(\bigcap_{n=1}^{\infty}[x_n,x))=\lim_n \nu([x_n,x))=$$
$$=\lim_n(f_\nu(x)-f_\nu(x_n)). \quad ▌$$

下面的定理是反面的命題。

定理 2. 設 f 是一个有界单調函数，从左边連續，并且 $f(-\infty)=0$，則存在 **S** 上唯一的一个有限測度 ν，使得 $f=f_\nu$。

証明. 这个定理的証明和勒貝格測度的建立完全一样。換一句話說，如果对于每一个半閉区間我們以等式

$$\nu([a,b))=f(b)-f(a)$$

来定义 ν，則在 §8 中将 μ 換为 ν，結論仍然成立，因而可以应用測度的扩張定理（§13 定理 1）。唯一需要修改的，乃是我們用来証明 §8 定理 3 的論点。我們要証明的就是，如果 $\{[a_i,b_i)\}$ 是半閉区間的一个叙列，而 $[a_0,b_0)$ 是被这个叙列的併集所包的一个半閉区間，則有

$$\nu([a_0,b_0))\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\nu([a_i,b_i)).$$

如果 $a_0=b_0$，結論显然成立；在其他的情形，令 ε 为滿足关系 $\varepsilon<$

$<b_0-a_0$ 的一个正数。因为 f 在 a_i 是左連續的，因此，对于每一个正数 δ 和每一个正整数 i，存在正数 ε_i 使得

$$f(a_i)-f(a_i-\varepsilon_i)<\frac{\delta}{2^i},\quad i=1,2,\cdots.$$

如果 $F_0=[a_0,\ b_0-\varepsilon]$，并且 $U_i=(a_i-\varepsilon_i,\ b_i)$，$i=1,2,\cdots$，則 $F_0\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$；因此，根据海尼-波雷耳定理，存在正整数 n 使得

$$F_0\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_i.$$

与 §8 定理 2 的証明相类似，我們可以得到

$$f(b_0-\varepsilon)-f(a_0)\leqslant\sum_{i=1}^{n}(f(b_i)-f(a_i-\varepsilon_i))=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(f(b_i)-f(a_i))+\sum_{i=1}^{n}(f(a_i)-f(a_i-\varepsilon_i))\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}(f(b_i)-f(a_i))+\delta.$$

由于 ε 和 δ 都是任意的，再利用 f 在 b_0 的左連續性，就得到我們需要的結論。▌

定理 1 和 2 建立了定义在 **S** 上的一切有限測度 ν 与某些单实变数函数 f_ν 之間的一一对应关系；下面两条定理指出，如何可以将測度 ν 的某些測度論的性質借助于对应的函数 f_ν 而表达出来。

定理 3. 設 ν 是 **S** 上的有限測度，則 f_ν 为連續的必要和充分条件是：对于任一点 x，有 $\nu(\{x\})=0$。

証明。如果 $\{x_n\}$ 是一个遞減数列，使得 $\lim_n x_n=x$，則

$$\nu(\{x\})=\nu(\bigcap_{n=1}^{\infty}[x_n,x))=\lim_n\nu([x_n,x))=$$
$$=\lim_n(f_\nu(x_n)-f_\nu(x)).$$

我們注意到，f_ν 在 x 为連續的必要和充分条件是上式最右端的一項为零。定理于是証明完畢。▌

設 f 是单实变数的实値函数，如果对于每一个正数 ε，存在正

数 δ, 使得对于有界开区間的任何有限不相交类 $\{(a_i, b_i): i=1, \cdots, n\}$, 只要满足关系式 $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$, 必有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon,$$

则称 f 是絕对連續的。

定理 4. 設 ν 是 **S** 上的有限測度, 則 f_ν 为絶对連續的必要和充分条件是: ν 对于 μ 是絶对連續的。

証明。設 $\nu \ll \mu$, 則对于每一个正数 ε, 存在正数 δ, 使得对于满足条件 $\mu(E)<\delta$ 的任何波雷耳集 E, 有 $\nu(E)<\varepsilon$。由此可見, 如果 $\{(a_i, b_i): i=1, \cdots, n\}$ 是有界开区間的有限不相交类, 满足关系

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}[a_i, b_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta,$$

則

$$\sum_{i=1}^{n}|f_\nu(b_i)-f_\nu(a_i)|=\sum_{i=1}^{n}\nu([a_i, b_i))=\nu\left(\bigcup_{i=1}^{n}[a_i, b_i)\right)<\varepsilon.$$

現在証明条件是必要的。設 f_ν 是絕对連續的。令 ε 为任意正数, 而 δ 是一个正数使得当 $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$ 时有 $\sum_{i=1}^{n}|f_\nu(b_i)-f_\nu(a_i)|<\varepsilon$。如果 E 是一个波雷耳集, 并且它的勒貝格測度为零, 則存在半閉区間的不相交叙列 $\{[a_i, b_i)\}$ 使得

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i) \qquad \text{和} \qquad \sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)<\delta.$$

于是, 对于每一个正整数 n, 有 $\sum_{i=1}^{n}|f_\nu(b_i)-f_\nu(a_i)|<\varepsilon$; 因此

$$\nu(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\nu([a_i, b_i))=\sum_{i=1}^{\infty}|f_\nu(b_i)-f_\nu(a_i)| \leqslant \varepsilon,$$

由于 ε 是任意的，所以 $\nu(E)=0$。 ▌

为了表达下面这个定理（它是勒貝格分解定理的很簡单然而很有用的一个推論），我們再引进一个定义。設 ν 是 **S** 上的有限測度，如果存在可列集 C 使得 $\nu(X-C)=0$，則称 ν 是**純原子的**。

定理 5. 設 ν 是 **S** 上的有限測度，則存在唯一确定于 **S** 上的三个測度 ν_1, ν_2 和 ν_3，滿足下述条件：ν_1, ν_2, ν_3 的和是 ν；ν_1 对于 μ 是絕对連續的；ν_2 是純原子的；ν_3 对于 μ 是奇异的，但对于任一点 x 有 $\nu_3(\{x\})=0$。

証明。按照勒貝格分解定理（§32 定理 3），存在 **S** 上的两个測度 ν_0 和 ν_1，它們的和是 ν，并且 ν_0 对于 μ 是奇异的，而 ν_1 对于 μ 是絕对連續的。令 C 为滿足关系式 $\nu_0(\{x\})\neq 0$ 的点 x 組成的集；因为測度 ν 是有限的，所以 C 是一个可列集。如果令

$$\nu_2(E)=\nu_0(E\cap C) \qquad 和 \qquad \nu_3(E)=\nu_0(E-C),$$

則分解 $\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3$ 显然具有定理中所述的全部性質。分解的唯一性可从勒貝格分解的唯一性以及 C 的很明显的唯一性推出。 ▌

(1) 本节的全部結論对于广义測度 ν 都成立，只須将 f_ν 为单調这个条件换为有界变差的条件．(提示：每一个有界变差函数是两个单調函数之差.)

(2) 单調函数和絕对連續函数的某些熟知的性質可以利用本节的方法获得証明；我們指出下面两个例子．

(2a) 单調函数最多具有可列無限多个間断点．(提示：如果 f 是有界单調函数，从左边連續，并且 $f(-\infty)=0$，对于这种情形可以应用定理 2 以及在証明定理 3 时所用的論点．对于一般的場合，可以利用一些簡单的变换化为这种特殊場合.)

(2b) 如果有界单調函数 f 是絕对連續的，并且 $f(-\infty)=0$，則存在非負勒貝格可积函数 ϕ 使得

$$f(x)=\int_{-\infty}^{x}\phi(t)\,d\mu(t).$$

(提示：应用定理 2 和 4.)

(3) 下面的一些命题指出，§15 定理 3 和 15.1 中的結果可以扩充到一个非常广泛的测度类上，这个测度类包含本节所討論的测度在內.

(3a) 設 **S** 是由 X 的子集組成的一个 σ-环，**L** 是 **S** 中之集組成的一个絡，**S**(**L**) 是由 **L** 产生的 σ-环. 如果定义在 **S** 上的两个有限测度 μ 和 ν 在 **L** 上相等，则它們在 **S**(**L**) 上也相等. (提示：如果 $E\epsilon\mathbf{L}$, $F\epsilon\mathbf{L}$, 并且 $E\subset F$, 则 $\mu(F-E)=\nu(F-E)$. 然后应用 5.2, 8.5 和 §13 定理 1.)

(3b) 設 X 是一个度量空間. 如果定义在 X 的全体波雷耳集类上的两个有限测度 μ 和 ν 在 X 的全体开集类 **U** 上相等，则 μ 和 ν 对于一切波雷耳集相等.

(3c) 設 X 是一个度量空間，**U** 是 X 的全体开集类，μ 是定义在 X 的全体波雷耳集类上的一个有限测度，則对于每一个波雷耳集 E 有 $\mu(E)=\inf\{\mu(U): E\subset U\epsilon\mathbf{U}\}$. (提示：由等式 $\nu^*(E)=\inf\{\mu(U): E\subset U\epsilon\mathbf{U}\}$ 确定的集函数 ν^* 是一个有限的度量外测度(参看 11.8a)，它在全体波雷耳集类上确定了一个测度 ν，并且 ν 和 μ 在 **U** 上相等.)

(3d) 設 X 是一个度量空間，μ 是定义在 X 的全体波雷耳集类上的一个测度，**C** 是 X 中具有有限测度的全体閉子集組成的类，則对于每一个具有 σ-有限测度的波雷耳集 E，有 $\mu(E)=\sup\{\mu(C): E\supset C\epsilon\mathbf{C}\}$. (提示：只須考慮测度为有限的集 E. 令 $\nu(F)=\mu(E\cap F)$，然后对 ν 和 $X-E$ 应用 (3c).)

(3e) 設 X 是一个可分的完备度量空間，μ 是定义在 X 的全体波雷耳集类上的一个测度，$\mathbf{C}_0$ 是 X 中具有有限测度的全体紧子集組成的类，則对于每一个具有 σ-有限测度的波雷耳集 E，有 $\mu(E)=\sup\{\mu(C): E\supset C\epsilon\mathbf{C}_0\}$. (提示：应用 (3d) 和 9.10.)

(4) 設 ν 是 **S** 上的有限测度，如果波雷耳集 E_0 是 ν 的一个原子，則存在 E_0 中的点 x_0 使得 $\nu(E_0-\{x_0\})=0$. (提示：利用 (3) 可将一般場合化为 E_0 是有界閉集的場合.)

(5) 設 ν 是 **S** 上的有限测度，則 f_ν 为連續的必要和充分条件是：ν 是缺原子的.

(6) 本节的大部分結論对于不一定为有限的测度和广义测度 ν 也成立；重要的是，当 E 是有界区間时，$\nu(E)$ 必須是有限的.

(7) 为了和 (6) 相联系，并且为了建立反例起見，我們指出下面这个有

趣的事实．存在定义在 S 上的 σ-有限测度 ν, ν 对于 μ 是絕对連續的，但对于具有非空內部的任何区間 E，有 $\nu(E)=\infty$．(提示：設 f 是一个正的勒貝格可积函数使得对于每一个正数 ε 有

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f^2\,d\mu=\infty;$$

例如，可令 $f(x)=(e^{|x|}\sqrt{|x|})^{-1}$．設 $\{r_1, r_2, \cdots\}$ 是全体有理数列，如果对于每一个 x 令

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}f(x-r_n),$$

而对于每一个波雷耳集 E 令

$$\nu(E)=\int_E g^2\,d\mu,$$

則測度 ν 具有命題中所述的全部性質．我們注意到，因为

$$\int g\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int f\,d\mu,$$

所以函数 g 几乎处处有限 $[\mu]$．)

第九章 概 率

§44. 引 言

本节的目的是，对于如何在测度論的基础上建立概率的理論，給以直观的解釋。

在概率論中，"事件"是还沒有确切定义的术語中最主要的一个。不严格地說，某种物理試驗的任何一种可能發生的結果就是一个事件。我們取大家都知道的擲骰子的試驗作为例子，以 $x(=1,2,3,4,5$ 或 $6)$ 表示擲出的点数。"x 是偶数"，"x小于 4"，"x 等于 6"——每一个这样的論断，都与試驗的一个可能發生的結果相对应。从这个观点出發，事件的数目就是六个正整数 1,2,3,4,5,6 的一切可能組合的总数。如果为了完整以及以后应用的方便起見，我們再加上一个不可能事件："x不等于 1, 2, 3, 4, 5, 6 六个数中的任何一个"，于是在擲骰子这个試驗中我們就有了 2^6 种可能的事件。为了进一步討論这个例子，我們引进一些記号。我們以 $\{2,4,6\}$表示事件"x 是偶数"，以$\{1,2,3\}$ 表示事件 "x 小于 4"，等等。不可能事件和必然事件 $(=\{1,2,3,4,5,6\})$ 应該用特殊的記号来表示；我們分别以 0 和 X 来記它們。

关于事件，在日常談話中常常会用到下面的种种說法："两个事件 E 和 F 是互不相容的"，"事件 E 和事件 F 是对立的"，"事件 E 是由 F 和 G 二者同时發生而組成的"，以及"事件 E 是由 F 和 G 二者至少發生其一而組成的"。这些說法指出了在事件和事件之間

有一定的关系存在，同时也指出了从原来的事件經过运算可以产生新的事件；这些关系和运算，最后必然会成为事件的数学理論的一部分。

对立事件的概念也許是最明显的。設E是一个事件，則“E不發生”这一个事件就称为E的对立事件，記为E'。于是，若$E=\{2,4,6\}$，則$E'=\{1,3,5\}$。对应于邏輯上的“或”与“和”，我們也可以引进事件組合的概念。对于任意两个事件E和F，我們以$E\cup F$和$E\cap F$分別表示它們的“併”与“交”：事件$E\cup F$發生，必須而且只須E和F二者至少發生其一；事件$E\cap F$發生，必須而且只須E和F二者都發生。于是，若$E=\{2,4,6\}$，而$F=\{1,2,3\}$，則$E\cup F=\{1,2,3,4,6\}$，$E\cap F=\{2\}$。

以上这些討論，以及在更为复杂的試驗里这些概念的很明显的推广，說明了概率論建立在对于以集为元素的布尔代数的研究上。一个事件就是一个集，对立事件就是余集；互不相容事件就是不相交集；由两个事件同时發生而組成的事件就是两个集的交集。很明显，这种以集論的术語来表达的方式还可以列举出許多来。

对于古典概率論来說，由于考虑的問題只是些簡单的賭博游戏，例如擲骰子，其中可能事件的总数是有限的，因此，将一切事件的类归結为以集为元素的布尔代数，是很恰当的。但对于近代理論和实际中产生的問題，甚至对于比較复杂的賭博游戏的討論，都需要另外有一个附加的假設条件。这个条件就是：事件系对于可列併的运算必須是封閉的；用我們的术語来說，就是：布尔代数必須是一个σ-代数。

也許我們可以通过一个例子，虽然是一个不太自然的例子，来說明上述假設条件的必要性。假定有一个賭徒，决心要連續地擲一粒骰子，直到第一次出現6点为止。令E_n表示只在第n次擲出6这一事件。事件$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$發生，当而且只当游戏在有限次的投擲后終止。对立事件E'的發生，至少在邏輯上（即使不是在

实际上)是可能的，因此在一般的概率理論中，要将这一事件包含在內而加以討論，是很合理的。許許多多这一类的例子，尤其重要的是某些純粹数学上的理由，証明我們前面所述的論点是正确的，那就是，概率的数学理論建立在对于以集为元素的布尔 σ- 代数的研究上。

但这并不是說，一切以集为元素的布尔 σ- 代数都是概率論的研究对象。同时，有关这类布尔 σ- 代数以及它們的元素之間关系的命題，通常都只限于性質方面的描述；而概率論則也要研究布尔 σ-代数的量的方面的性質。現在我們进而引出概率的定义。

当我們問："某一事件的概率是多少？"我們希望得到的回答乃是一个数，是与这个事件相联系的一个数。換一句話說，概率是事件 E 的一个数值的函数 μ，也就是定义在一个布尔 σ- 代数上的集函数。从直观和实际上来考虑，我們要求数 $\mu(E)$ 应該能够表出事件 E 出現的頻率。如果在試驗的大量重复进行下，可能發生的事件 E 事实上只出現了总次数的四分之一（因而其余四分之三的次数乃是 E' 出現的次数），則我們可以試圖以 $\mu(E)=\frac{1}{4}$ 来反映这个結果。即使是这样一种非常粗糙的估計，已經可以使我們对函数 μ 的性質有一个初步的認識。

令 $\mu(E)$ 表示事件 E 發生的頻率，也就是 E 出現的次数与試驗的总次数之比，則 $\mu(E)$ 必須是一个非負的实数，事实上乃是单位区間 $[0,1]$ 中的一个数。如果事件 E 和 F 互不相容——例如，在上面擲骰子的例子里，$E=\{1\}$，$F=\{2,4,6\}$——則事件 $E\cup F$（在上面的例子里就是 $\{1,2,4,6\}$）發生的頻率显然就是 E,F 二者頻率之和。如果擲出 1 点的次数占总次数的 $\frac{1}{6}$，而擲出偶数点占 $\frac{1}{2}$，則擲出 1 点或偶数点的次数占总次数的 $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$。由此可見，函数 μ 不能是完全任意的；它必須滿足可加性的条件，也就是說，如果 $E\cap F=0$，則 $\mu(E\cup F)$ 必須等于 $\mu(E)+\mu(F)$。又因为必然事件每次都發生，我們必須規定 $\mu(X)=1$。

現在我們只差一点就可以到达概率的最后定义了；所差的这一点在表面上看起来好像是很微細的一点，而事实上却是極其重要的。如果 μ 是定义在以集为元素的布尔 σ- 代数上具有可加性的集函数，而 $\{E_n\}$ 是这个代数中不相交集的無限叙列，則等式

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$$

可能成立，也可能不成立。可列可加性是我們对于 μ 的另一个附加条件——如果沒有这一个条件，近代概率論就不可能起作用。从直覚的观点出發，我們要求可列可加性正如同要求有限可加性一样。至少，可列可加性与我們的直观并無抵触之处，而由此建立起来的理論已經获得極为成功的發展，足以証明当初引进它是完全正确的。总結上面的討論，我們得到概率的定义如下：

概率 μ 是定义在由集 X 的子集組成的某个布尔 σ- 代数 $\mathbf{S}$ 上的測度，并且 $\mu(X)=1$。

在前面几章关于測度的理論中，"可測函数"、"积分"和"乘积空間"这些概念占有重要的地位；以下我們将介紹这些概念的概率意义。

我們先从"随机变数"这个常用的术語开始。"随机变数是一个变量，它的值由机会确定"。因此，我們所要考虑的乃是"变量"。大家都知道，自从人們开始要求严格地表述数学的定义以来，"变量"这个术語，特别是，一个变量，它的值是按照某种方式而"确定"的，事实上就是指的函数。这样，我們就可以說，随机变数是一个函数，它所取的值由机会来确定。換一句話說，随机变数就是与某一个試驗相联系的函数，試驗一旦完成，函数的值也就随之确定。我們已經看到，在数学里与試驗相对应的就是測度空間 X；因而，試驗結果的函数就是 X 中点 x 的函数。所以，随机变数是定义在測度空間 X 上的实值函数。

但是上面的說法还沒有完全地描述出"随机变数"这个术語通

常所包含的意义。定义在測度空間 X 上的函数 f，只有当与 f 的值相关的概率問題具有意义的时候，才能够称为随机变数。例如，"f 的值在 α 与 β 之間的概率是多少？"就是一个典型的問題。按照測度論的説法，就是："滿足关系式 $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$ 的点 x 的集，它的測度是多少？"为了使得这一类的問題都能得到解答，必須而且只須，在問題中出現的集都屬于 X 的基本 σ- 代数 $\mathbf{S}$。換一句話説，随机变数是一个可測函数。

現在我們来詳尽地討論一下与擲骰子的試驗相联系的随机变数。假定骰子的質量是均匀的，我們以等式 $f(x)=x$ 来定义随机变数 f。函数 f 可能取的值是 $1,2,3,4,5,6$ 六个正整数。在概率論中，这六个数的算术中值 $\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)$ 有相当重要的意义；我們称它为随机变数 f 的平均值、中值或数学期望。如果骰子里灌了鉛，則 x 出現的概率就不一定是 $\frac{1}{6}$ 而是 p_x，这时算术中值就变成了加权中值；在这种情形下 f 的数学期望是 $1 \cdot p_1+\cdots+6 \cdot p_6$。在函数 f 取值的数目为無限时，这种加权和数可以类似地以积分表出；如果可測函数 f 是可积的，則按照定义，积分的值就是 f 的数学期望。

这样，可測函数及其积分在概率論中就有了意义；为了揭露乘积空間的概率意义，以下我們对擲骰子的試驗繼續加以研究。为了簡单起見，我們仍然假定擲出任何一面的可能性是相等的，因而每一面出現的概率都是 $\frac{1}{6}$。考虑事件 $E=\{2,4,6\}$ 和 $F=\{1, 2\}$。我們首先要引进条件概率的概念，利用这个概念就可以解答下面这一类的問題："如果知道了事件 F 已經發生，問事件 E 發生的概率是多少？"在擲骰子的例子里，就是："已知 x 小于 3，問 x 为偶数的概率是多少？"所謂"条件概率"，就是要計算在預先指定的条件下某事件發生的概率。

設有事件 $G=\{2\}$，現在假定事件 G 已發生，我們要来求 E 的条件概率。这个問題的解答，在直观上是十分明显的，它并不取决

于任何像骰子是否均匀之类的条件。既然已知 x 等于 2，则 x 当然是偶数，因此 E 的条件概率是 1。这个問題的解决所以是如此地容易，乃是因为 G 被 E 所包。在一般的場合，我們需要計算，在什么样的程度或比例下，已知事件 F 被未知事件 E 所包。到了这里，問題的解答差不多已經是很明显了：F 被 E 所包的程度，可以用 E 和 F 同时發生的可能性来量度，也就是用 $\mu(E\cap F)$ 来量度。但是問題并沒有完全解决，因为我們不但要考虑 $E\cap F$ 的大小，主要的还要考虑 $E\cap F$ 的大小与 F 的大小之比。

現在我們可以給出条件概率的定义了。在事件 F 已經發生的情况下，事件 E 的条件概率定义为 $\mu(E\cap F)/\mu(F)$，記为 $\mu_F(E)$。如果 $E=\{2,4,6\}$，$G=\{2\}$，我們得到前面已經得出的結論：$\mu_G(E)=1$；如果 $E=\{2,4,6\}$ 而 $F=\{1,2\}$，則 $\mu_F(E)=\frac{1}{2}$，这在直观上是十分合理的。换一句話説，如果已知 x 等于 1 或 2，則 x 为奇数 $(=1)$ 或偶数 $(=2)$ 的概率都是 $\frac{1}{2}$。

考虑下面两个問題："如果事件 F 已經發生，則事件 E 的概率是多少"？ "事件 E 的概率是多少"？ 当然，答案分别是 $\mu_F(E)$ 和 $\mu(E)$。在有些場合中，例如在前面的例子里，对于上述两个問題来說，答案是相等的；也就是説，事件 F 的發生与否并不影响事件 E 的概率。在这种情形下，我們很自然地想到用"独立"或"無关"来表达它們的相互关系：事件 E 的概率分布与事件 F 無关。更精确地說，如果 $\mu_F(E)=\mu(E)$，則事件 E 和 F 是互相独立的。如果我們回想一下 $\mu_F(E)$ 的定义，就可以将独立事件的定义表达成更为对称并且常用的形式：当而且只当 $\mu(E\cap F)=\mu(E)\mu(F)$ 时，事件 E 和 F 称为概率無关（或統計無关，或随机無关）或独立。

假定我們要互相独立地进行两个同样的試驗——例如，将一粒均匀的骰子連續擲两次。在这种复合試驗下，每次得出的結果就不再是一个数，而是一对数 (x_1,x_2) 了。与这种复合試驗相对应的測度空間中的点，乃是原来的測度空間和它自己的笛卡兒乘积

空間中的点。現在的問題是，要在乘积空間中确定概率，即測度。作为一个例子，我們考慮事件$E=$“$x_1<3$”和$F=$“$x_2<4$”。我們有$\mu(E)=\frac{1}{3}$，$\mu(F)=\frac{1}{2}$；如果将試驗的独立性了解为任意两个事件例如E和F的独立性，則必然有$\mu(E\cap F)=\frac{1}{6}$。

根据上段的論点，我們看到，如果一个試驗在数学上由一个測度空間$(X,\mathbf{S},\mu)$給出，則两个互相独立的同样的試驗組合在数学上就是$(X,\mathbf{S},\mu)$与其本身的笛卡兒乘积空間。

正如同由同一个試驗的两次重复产生了二維笛卡兒乘积空間，由任意有限次数的重复，例如n次，就可以給出n維笛卡兒乘积空間。这个步驟也可以扩充到無限維的場合：一个試驗的無限多次互相独立的重复，在数学上就是一个無限維笛卡兒乘积空間。虽然在实际上一个試驗的無限多次互相独立的重复是不可想像的，但是我們考慮無限維乘积空間却是很有益处的。問題在于，有許多概率的命題是关于大量試驗或对于事件的發生进行长期观察的結論，而要精确地表达出这类命題，必須利用十分严密的極限定理。

我們的引言到此告一段落；从下一节开始我們轉而詳尽地研究概率論的基本概念和結論。

§45. 独 立 性

全有限測度空間$(X,\mathbf{S},\mu)$如果滿足条件$\mu(X)=1$，称为**概率空間**；定义在概率空間上的測度μ称为**概率測度**。

設$\mathbf{E}$是概率空間$(X,\mathbf{S},\mu)$中可測集的有限或無限类，如果对于$\mathbf{E}$中不相同集的每一个有限类$\{E_i: i=1,\cdots,n\}$，等式

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\mu(E_i)$$

成立，則称类$\mathbf{E}$中的集是(随机)独立的。在$\mathbf{E}$只包含两个集E和F的場合下，独立性的条件由等式

$$\mu(E\cap F)=\mu(E)\mu(F)$$

表出。作为一个例子，我們考虑具有勒貝格测度的单位正方形 $X=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$；令

$$E=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1, \quad a\leqslant y\leqslant b\},$$
$$F=\{(x,y):c\leqslant x\leqslant d, \quad 0\leqslant y\leqslant 1\},$$

其中 a,b,c,d 是单位閉区間 $[0,1]$ 中任意的数，則 E 和 F 是互相独立的。我們注意到，要使得一个类 $\mathbf{E}$ 中的集（即使 $\mathbf{E}$ 是一个有限类也好）是独立的，則 $\mathbf{E}$ 中不相同的集两两独立还是不够的。

設 $\mathcal{E}$ 是定义在概率空間 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 上的实值可測函数的有限或無限集，如果对于 $\mathcal{E}$ 中不相同函数的每一个有限子集 $\{f_i:i=1,\cdots,n\}$，以及数直綫上波雷耳集的每一个有限类 $\{M_i:i=1,\cdots,n\}$，等式

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{n}\{x:f_i(x)\in M_i\})=\prod_{i=1}^{n}\mu(\{x:f_i(x)\in M_i\})$$

成立，則称集 $\mathcal{E}$ 中的函数是（随机）独立的。下面是这个条件的一个等价的說法。如果对于 $\mathcal{E}$ 中每一个函数 f，按照任意的方式选擇数直綫上的一个波雷耳集 M_f，則类 $\mathbf{E}=\{f^{-1}(M_f):f\in\mathcal{E}\}$ 中的集是互相独立的。下面是两个独立函数 f 和 g 的例子。如同在上面的例子里一样，取单位正方形作为 X，而由等式 $f(x,y)=x$ 和 $g(x,y)=y$ 分别定义 f 和 g。

我們的独立集和独立函数的例子指出，在随机独立性和笛卡兒乘积空間的概念之間存在着很密切的联系。事实上，假定 f_1 和 f_2 是定义在概率空間 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 上的两个独立函数，我們来考虑由等式

$$T(x)=(f_1(x),f_2(x))$$

确定的，X 在欧几里得平面中的变换 T。如果平面中的可測性了解为按照波雷耳意义的可測性，則因 $X\in\mathbf{S}$ 而 f_1 和 f_2 都是可測函数，所以 T 是一个可測变换；此外，f_1 和 f_2 本身都是 X 在数直綫中的可測变换。与独立性的定义加以直接的比較，我們看出，函数 f_1 和 f_2 的独立性可以由等式

$$\mu T^{-1}=\mu f_1^{-1}\times\mu f_2^{-1}$$

很簡单地表达出来(如果以記号 $f_1 \times f_2$ 来表示变換 T,則上面这个等式取分配律的形式)．如果在平面上定义函数 g_1 和 g_2 如下：

$$g_1(y_1, y_2) = y_1, \qquad g_2(y_1, y_2) = y_2,$$

則容易驗証，$f_1 = g_1 T$，$f_2 = g_2 T$．从这些很簡单的考虑，我們已經可以得到下面的結論．

定理 1. 設 f_1 和 f_2 是独立函数，二者都不是几乎处处为零，則 f_1 和 f_2 都为可积函数的必要和充分条件是：它們的乘积 $f_1 f_2$ 是可积函数．如果滿足了这个条件，則有

$$\int f_1 f_2 \, d\mu = \int f_1 \, d\mu \cdot \int f_2 \, d\mu.$$

証明．利用上面引进的記号，我們看出（根据 §39 定理 3），$|f_i|$ 的可积性等价于 g_i 的可积性，$i = 1, 2$；而根据富比尼定理，如果 $|g_1|$ 和 $|g_2|$ 是可积的，則 $|g_1 g_2|$ 是可积的．反之，如果 $|g_1 g_2|$ 是可积的，則 $|g_1 g_2|$ 的几乎每一个截口是可积的．因为每一个这样的截口乃是 $|g_1|$ 或 $|g_2|$ 与一个常数的乘积，而根据假設条件，f_1 和 f_2 都不是几乎处处为零，所以可令这些常数因子异于零；由此可見，如果 $|g_1 g_2|$ 是可积的，則 $|g_1|$ 和 $|g_2|$ 都是可积的．最后，再应用一次 §39 定理 3 就可以說明，$|g_1 g_2|$ 是可积的必須而且只須 $|f_1 f_2|$ 是可积的，于是定理中关于可积性部分就得到了証明．定理的第二部分可由富比尼定理推出． ▌

乘积空間在独立函数的研究中的应用，其范圍远远超出上面指出的簡单情形．例如，設 $\{f_n\}$ 是独立函数的叙列，Y 是数直綫的叙列的笛卡兒乘积空間，其中每一个数直綫中的可測性了解为按照波雷耳意义的可測性．如果对于每一个 x，令

$$T(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots),$$

則 T 是 X 在 Y 中的可測变換；函数 f_n 为独立的必要和充分条件是

$$\mu T^{-1} = \mu f_1^{-1} \times \mu f_2^{-1} \times \cdots.$$

如果在 Y 上定义函数 g_n 如下：

$$g_n(y_1, y_2, \cdots) = y_n, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

则 $f_n = g_n T, n = 1, 2, \cdots$。对于函数的任意（有限，可列，或不可列）集，类似的結論也成立。

定理 2. 設 $\{f_{ij}: i = 1, \cdots, k; j = 1, \cdots, n_i\}$ 是独立函数集，如果 ϕ_i 是 n_i 个实变数的实值波雷耳可測函数，$i = 1, \cdots, k$，并且

$$f_i(x) = \phi_i(f_{i1}(x), \cdots, f_{in_i}(x)),$$

则函数 $f_1, \cdots, f_k$ 是独立的。

証明。利用前面建立起来的关于乘积空間和独立性的关系，很容易証明这个定理。設 Y_{ij} 是数直綫，$i = 1, \cdots, k, j = 1, \cdots, n_i$，并令 $Y = \times_{i,j} Y_{ij}$。如果令

$$T(x) = (f_{11}(x), \cdots, f_{1n_1}(x), \cdots, f_{k1}(x), \cdots, f_{kn_k}(x)),$$

$$g_{ij}(y_{11}, \cdots, y_{1n_1}, \cdots, y_{k1}, \cdots, y_{kn_k}) = y_{ij}$$

和

$$g_i = \phi_i(g_{i1}, \cdots, g_{in_i}),$$

则 $f_i = g_i T$, $i = 1, \cdots, k$. 因为函数 g_i 显然是独立的，所以函数 f_i 也是独立的。 ▮

作为本节的結束，我們引进概率論中常用的一个术語。設 f 是定义在概率空間 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 上的一个实值可測函数，并且 f^2 是可积的，则由許瓦兹不等式（即当 $p = 2$ 时的荷德尔不等式，参看 §42 定理 1）可知，f 本身也是可积的，并且有

$$\left(\int f\, d\mu\right)^2 \leq \int f^2\, d\mu.$$

如果令 $\int f\, d\mu = \alpha$，则

$$\int (f - \alpha)^2\, d\mu$$

称为 f 的**方差**，記为 $\sigma^2(f)$。因为恒等于常数的函数在整个概率空間上的积分值就等于这个常数，所以根据 α 的定义就有

$$\sigma^2(f)=\left(\int f^2 d\mu\right)-\left(\int f d\mu\right)^2.$$

对于任意实数 c, 显然有 $\sigma^2(cf)=c^2\sigma^2(f)$.

定理 3. 設 f 和 g 是具有有限方差的独立函数, 則

$$\sigma^2(f+g)=\sigma^2(f)+\sigma^2(g).$$

証明. 我們有

$$\sigma^2(f+g)=\int (f+g)^2\, d\mu-\left(\int (f+g)d\mu\right)^2=$$

$$=\int f^2\, d\mu+2\int fg\; d\mu+\int g^2 d\mu-\left(\int f\, d\mu\right)^2-$$

$$-2\left(\int f\, d\mu\right)\left(\int g\, d\mu\right)-\left(\int g\, d\mu\right)^2;$$

应用定理 1 就得到本定理的結論. ▌

(1) 設 F 是概率空間$(X, \mathbf{S}, \mu)$中具有正測度的一个可測集, 如果对于每一个可測集 E, 令 $\mu_F(E)=\mu(F\cap E)/\mu(F)$, 則 μ_F 是定义在 $\mathbf{S}$ 上滿足条件 $\mu_F(F)=1$ 的一个概率測度; 集 E 和 F 是独立的, 必須而且只須 $\mu_F(E)=\mu(E)$. 数 $\mu_F(E)$称为 **E 在条件 F 下的条件概率.**

(2) 設$\{E_i: i=1, \cdots, n\}$是具有正測度的可測集的有限类, 則

$$\mu(E_1\cap\cdots\cap E_n)=\mu(E_1)\mu_{E_1}(E_2)\cdots\mu_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}}(E_n).$$

这个結果称为条件概率的**乘法定理.**

(3) 設$\{E_i: i=1, \cdots, n\}$ 是具有正測度的不相交可測集的有限类, 它的併集是 X(即設$\{E_i\}$是 X 的一个分割), 則对于每一个可測集 F, 有

$$\mu(F)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)\mu_{E_i}(F);$$

如果 F 具有正的測度, 則

$$\mu_F(E_j)=\frac{\mu(E_j)\mu_{E_j}(F)}{\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)\mu_{E_i}(F)}.$$

这个結果称为**貝叶斯定理.**

(4) 設$\{E_i: i=1, \cdots, n\}$和$\{F_j: j=1, \cdots, m\}$是 X 的两个分割, 如果对于

$i=1,\cdots,n$ 和 $j=1,\cdots,m$, 有 $\mu(E_i\cap F_j)=\mu(E_i)\mu(F_j)$，則称这两个分割是独立的. 两个集 E 和 F 是独立的，其必要和充分条件是：分割$\{E,E'\}$和$\{F,F'\}$是独立的.

(5) 設$X=\{x:0\leq x\leq 1\}$是具有勒貝格測度的单位区間. 对于每一个正整数 n, 在 X 上定义一个函数 f_n 如下：

$$f_n(x)=\begin{cases}+1, & \text{若 } \frac{i-1}{2^n}\leq x<\frac{i}{2^n}, \quad i \text{ 为奇数},\\ -1, & \phantom{\text{若 } \frac{i-1}{2^n}\leq x<\frac{i}{2^n},} \quad i \text{ 为偶数}.\end{cases}$$

函数 f_n 称为**拉德馬海尔函数**. f_1, f_2 和 f_1f_2 这三个函数并不是互相独立的，但其中任意两个是独立的.

(6) 設 f 和 g 是独立可积函数，M 是数直綫上的波雷耳集；如果 $E=f^{-1}(M)$，則

$$\int_E fg\,d\mu=\int_E f\,d\mu\cdot\int_E g\,d\mu.$$

(提示：因为 $\chi_E(x)=\chi_M(f(x))$，所以，根据定理 2，$f\chi_M(f)$ 和 g 是独立的.)

(7) 設 f 和 g 是具有有限方差的可测函数，并且 $\sigma(f)\sigma(g)\neq 0$，則称

$$r(f,g)=\frac{\int fg\,d\mu-\int f\,d\mu\cdot\int g\,d\mu}{\sigma(f)\sigma(g)}$$

为 f 和 g 的**相关系数**，其中 $\sigma(f)=\sqrt{\sigma^2(f)}$ 称为 f 的**标准离差**. 如果 $r(f,g)=0$，則称函数 f 和 g 是**不相关的**. 如果 f 和 g 是独立的，則它們是不相关的. 等式 $\sigma^2(f+g)=\sigma^2(f)+\sigma^2(g)$ 成立的必要和充分条件是：f 和 g 是不相关的.

(8) 如果 f 和 g 是不相关的，則它們是不是独立的？(提示：取单位区間作为 X，并令 $f(x)=\sin 2\pi x$, $g(x)=\cos 2\pi x$.)

(9) 設 f 和 g 是两个独立可积函数，使得$(f+g)^2$是可积的，則 f^2 和 g^2 都是可积的.

§46. 独立函数級数

在整个这一节里面，我們假定所考虑的是一个固定的概率空間$(X,\mathbf{S},\mu)$. 下面是我們的第一个結果，称为**柯尔莫哥洛夫不等**

式.

定理 1. 設 $f_i, i=1,\cdots,n$, 是独立函数, 满足条件 $\int f_i\,d\mu=0$ 和 $\int f_i^2\,d\mu<\infty$, $i=1,\cdots,n$. 如果 $f(x)=\bigcup_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{k} f_i(x)\right|$ (即, f 是 f_i 的諸部分和的絕对值的最大值), 則对于每一个正数 ε, 有

$$\mu(\{x: |f(x)|\geqslant\varepsilon\})\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma^2(f_k).$$

証明. 令

$$E=\{x: |f(x)|\geqslant\varepsilon\}, \quad s_k=\sum_{i=1}^{k} f_i,$$

幷令

$$E_k=\{x: |s_k(x)|\geqslant\varepsilon\}\cap\bigcap_{1\leqslant i<k}\{x: |s_i(x)|<\varepsilon\}.$$

于是

$$\int_{E_k} s_n^2\,d\mu=\int_{E_k} s_k^2\,d\mu+\mu(E_k)\sum_{k<i\leqslant n}\int f_i^2\,d\mu\geqslant$$

$$\geqslant\int_{E_k} s_k^2\,d\mu\geqslant\mu(E_k)\varepsilon^2.$$

因为 $E=\bigcup_{k=1}^{n} E_k$, 幷且集 E_k 是不相交的, 所以

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma^2(f_k)=\int(f_1+\cdots+f_n)^2\,d\mu\geqslant\int_E s_n^2\,d\mu=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{E_k} s_n^2\,d\mu\geqslant\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)\varepsilon^2=\mu(E)\varepsilon^2. \quad \blacksquare$$

定理 2. 設 $\{f_n\}$ 是独立函数叙列, 满足条件 $\int f_n\,d\mu=0$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_2(f_n)<\infty$, 則級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 几乎处处收斂.

証明. 令

$$s_n(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x), \qquad n=1,2,\cdots,$$
$$a_m(x)=\sup\{|s_{m+k}(x)-s_m(x)|:k=1,2,\cdots\},$$
$$a(x)=\inf\{a_m(x):m=1,2,\cdots\},$$

则級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 x 收歛的必要和充分条件是：$a(x)=0$。根据柯尔莫哥洛夫不等式，对于每一个正数 ε 和每一对正整数 m,n，我們有

$$\mu(\{x:\bigcup_{k=1}^{n}|s_{m+k}(x)-s_m(x)|\geqslant\varepsilon\})\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=m+1}^{m+n}\sigma^2(f_k);$$

因此

$$\mu(\{x:a_m(x)\geqslant\varepsilon\})\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=m+1}^{\infty}\sigma^2(f_k).$$

从而有

$$\mu(\{x:a(x)\geqslant\varepsilon\})\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=m+1}^{\infty}\sigma^2(f_k).$$

因为級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^2(f_n)$ 是收歛的，所以 $\mu(\{x:a(x)\geqslant\varepsilon\})=0$。由于 ε 是任意的，于是得到定理的結論。 ▌

下面这个定理是反面的命題。

定理 3. 設 $\{f_n\}$ 是独立函数叙列，c 是一个正的常数，使得 $\int f_n d\mu=0$ 并使得 $|f_n(x)|\leqslant c$ 几乎处处成立，$n=1,2,\cdots$。如果級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在一个具有正測度的集上收歛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^2(f_n)<\infty.$$

証明。令 $s_0(x)=0$ 而 $s_n(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$, $n=1,2,\cdots$, 則根据叶果洛夫定理(参看 21.2),存在正数 d 使得集

$$E=\bigcap_{n=0}^{\infty}\{x: |s_n(x)|\leqslant d\}$$

具有正的測度。如果令

$$E_n=\bigcap_{i=1}^{n}\{x: |s_i(x)|\leqslant d\}, \quad n=0,1,2,\cdots,$$

則 $\{E_n\}$ 是一个遞減集叙列,它的交集是 E。令

$$F_n=E_{n-1}-E_n, \qquad n=1,2,\cdots,$$

$$\alpha_n=\int_{E_n} s_n^2\, d\mu, \qquad n=0,1,2,\cdots,$$

于是有

$$\alpha_n-\alpha_{n-1}=\int_{E_{n-1}} s_n^2\, d\mu-\int_{F_n} s_n^2\, d\mu-\int_{E_{n-1}} s_{n-1}^2\, d\mu=$$

$$=\int_{E_{n-1}} f_n^2\, d\mu+2\int_{E_{n-1}} f_n s_{n-1}\, d\mu-\int_{F_n} s_n^2\, d\mu,$$

$$n=1,2,\cdots.$$

因为

$$\int_{E_{n-1}} f_n^2\, d\mu=\mu(E_{n-1})\sigma^2(f_n), \qquad \int_{E_{n-1}} f_n s_{n-1}\, d\mu=0,$$

又因为

$$\mu(E_{n-1})\geqslant\mu(E),$$

$$|s_n(x)|\leqslant c+d,$$

其中 x 屬于 F_n, $n=1,2,\cdots$, 因此

$$\alpha_n-\alpha_{n-1}\geqslant\mu(E)\sigma^2(f_n)-(c+d)^2\mu(F_n), \qquad n=1,2,\cdots.$$

令 n 等于 1 到 k, 然后相加,我們得到

$$d^2\geqslant\mu(E_k)d^2\geqslant\alpha_k\geqslant\mu(E)\sum_{n=1}^{k}\sigma^2(f_n)-(c+d)^2. \quad \blacksquare$$

定理 2 和 3 指出,如果 $\{f_n\}$ 是独立函数的一个一致有界叙列,滿足条件 $\int f_n\, d\mu=0$, $n=1,2,\cdots$, 則級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 或者几乎处处

收斂，或者几乎处处發散；由此可見，使得这个級数收斂的点集，它的測度不是 0 就是 1。

定理 4. 設$\{f_n\}$是独立函数叙列，c 是一个正的常数，使得 $|f_n(x)|\leqslant c$ 几乎处处成立，$n=1,2,\cdots$，則級数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 几乎处处收斂的必要和充分条件是：級数$\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n\,d\mu$ 和$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^2(f_n)$都收斂。

証明. 設$\{g_n\}$是由等式

$$g_n(x)=f_n(x)-\int f_n\,d\mu,\qquad n=1,2,\cdots$$

确定的函数叙列，对$\{g_n\}$应用定理 2，就可以說明条件的充分性。現在証明条件的必要性。考虑 X 和它自己的乘积空間，在这个乘积空間上定义函数 h_n 如下：

$$h_n(x,y)=f_n(x)-f_n(y),\qquad n=1,2,\cdots.$$

根据假設条件，級数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$几乎处处收斂，所以級数$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x,y)$ 几乎处处收斂；又因为

$$\int h_n d(\mu\times\mu)=0,$$

由定理 3 可知，$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^2(h_n)<\infty$。但是 $\sigma^2(h_n)=2\sigma^2(f_n)$，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^2(f_n)<\infty$。因为 $\sigma^2(g_n)=\sigma^2(f_n)$，所以根据定理 2，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$几乎处处收斂；由关系式

$$\int f_n\,d\mu=f_n(x)-g_n(x),\qquad n=1,2,\cdots$$

可知，級数$\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n\,d\mu$ 收斂。 ▎

我們前面关于級数的全部結論，都包含在下面这个普遍的定理中。这个定理称为柯尔莫哥洛夫**三級数定理**。

定理 5. 設$\{f_n\}$是独立函数叙列，c是一个正的常数，令$E_n = \{x: |f_n(x)| \leqslant c\}, n=1,2,\cdots$。級数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$几乎处处收斂的必要和充分条件是：下面三个級数

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E'_n),$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f_n\, d\mu,$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{E_n} f_n^2\, d\mu - \left(\int_{E_n} f_n d\mu \right)^2 \right)$$

都收斂。

証明。令

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) \\ c \end{cases} \quad \text{和} \quad h_n(x) = \begin{cases} f_n(x), \\ -c\ , \end{cases} \quad \text{若} \quad \begin{cases} |f_n(x)| \leqslant c, \\ |f_n(x)| > c. \end{cases}$$

显然，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \quad \text{和} \quad \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$$

在相同的点处收斂。根据定理 4（分别用在$\{g_n\}$和$\{h_n\}$上），$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$几乎处处收斂的必要和充分条件是：下面四个級数

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{E_n} f_n d\mu \pm c\mu(E'_n) \right),$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{E_n} f_n^2 d\mu - \left(\int_{E_n} f_n d\mu \right)^2 + c^2\mu(E_n)\mu(E'_n) \mp \mp 2c\mu(E'_n) \int_{E_n} f_n d\mu \right)$$

都收斂。容易驗証，級数(a)，(b)和(c)的收斂性等价于級数(d)和(e)的收斂性(在符号±和∓的两两配合下)。在驗証时，除了簡单的加减法外，只須注意下面的事实：因为收斂級数的各項是有界的，所以，如果两个收斂級数中有一个級数的各項是非負的，則它們的乘积級数是收斂的。 ▮

(1) 下面这个結果称为**契貝雪夫不等式**．以前在我們关于平均收斂性和依測度收斂性的討論里，其实就已經包含了这个結果在內．

設 f 是具有有限方差的可測函数，則对于每一个正数 ε，有

$$\mu(\{x:|f(x)-\int f\,d\mu|\geqslant\varepsilon\})\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sigma^2(f).$$

柯尔莫哥洛夫不等式在 $n=1$ 时化为契貝雪夫不等式．沿用定理 1 中的記号，因为

$$\{x:|f(x)\geqslant\varepsilon\}=\bigcup_{k=1}^{n}\{x:|\sum_{i=1}^{k}f_i(x)|\geqslant\varepsilon\},$$

对于每一个部分和应用契貝雪夫不等式，我們得到

$$\mu(\{x:|f(x)|\geqslant\varepsilon\})\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\sigma^2(f_k).$$

(2) 如果对于拉德馬海尔函数列 $\{f_n\}$ (参看 45.5) 应用定理 4，可以得到一个很有趣的結果．設 $\{c_n\}$ 是一个实数列，則級数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_nf_n(x)$ 依照級数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2$ 为收斂或發散而几乎处处收斂或几乎处处發散．用概率論的話来說，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\pm c_n$ 收斂并且概率为 1 的必要和充分条件是：級数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2$ 收斂；这里我們假定，第一个級数中每一項取＋号或－号是等可能性的，并且它們的取法是各不相关的．

(3) 我們已經指出，使得独立函数級数收斂的点集，它的測度只可能是 0 或 1；上述事实乃是下面这个非常普遍的原理的推論，这个原理称为**零一律**．設概率空間 X 是概率空間叙列 $\{X_n\}$ 的笛卡兒乘积空間．对于每一个

正整数 n，令 $J_n=\{n+1, n+2, \cdots\}$. 如果对于任意的 n，X 中可测集 E 是一个 J_n-柱面，則 $\mu(E)=0$ 或 1.（提示：对于每一个可測集 F，令 $\nu(F)=\mu(E\cap F)$. 如果 F 是一个 J-柱面，其中 J 是一个有限集，則 $\nu(F)=\mu(E)\mu(F)$. 在这个等式中可以将 F 换为 E，因为定义在 X 的全体可测子集类上的有限測度由它在这种 J-柱面上的值唯一确定.）

(4) 設 $\{E_n\}$ 是独立集的叙列，則

$$\mu(\limsup_n E_n)=0$$

的必要和充分条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<\infty$$

（参看 9.6）.（提示：以 χ_n 表 E_n 的特征函数，对叙列 $\{\chi_n\}$ 应用定理 4.）这个結果称为**波雷耳-坎特立輔助定理**.

(5) 两个叙列 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 若满足关系式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{x: f_n(x)\neq g_n(x)\})<\infty,$$

則称为在辛欽意义下是**等价的**. 設 $\{f_n\}$ 是独立函数叙列，則級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 几乎处处收斂的必要和充分条件是：存在与 $\{f_n\}$ 等价的独立函数叙列 $\{g_n\}$，其中每一个 g_n 都具有有限的方差，使得級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int g_n d\mu \qquad 和 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sigma^2(g_n)$$

都收斂.

(6) 設 $\{f_n\}$ 是可积函数叙列，f 是具有有限方差的可测函数，并且对于每一个正整数 n，函数

$$f_1, \cdots, f_n, \quad f-(f_1+\cdots+f_n)$$

互相独立，則每一个 f_n 具有有限方差，并且級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n(x)-\int f_n\, d\mu\right)$$

几乎处处收斂.（提示：应用 45.9 和三級数定理.）

§47. 大数定律

在概率論中有一系列的極限定理，統称为大数定律；我們在本节里提出这类定理中具有典型性的两个。第一个定理称为**貝努里定理**或**弱大数定律**.

定理 1. 設$\{f_n\}$是具有有限方差的独立函数叙列，$\int f_n d\mu=0$，$n=1,2,\cdots$，并且

$$\lim_n \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(f_i)=0,$$

則平均值的叙列$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i\right\}$依測度收斂到 0.

証明. 因为 σ^2 是二次齐次函数，而对于独立函数来說又是可加的，所以

$$\int\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i\right)^2 d\mu=\sigma^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(f_i).$$

換一句話說，定理的假設条件和下列条件等价：平均值的叙列二阶平均收斂到 0（即在空間 $\mathscr{L}_2$ 中收斂到 0）。从这个条件就可以推出依測度收斂性. ▌

設 f 和 g 是定义在概率空間 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 上的两个实值可測函数，如果对于数直綫上的一切波雷耳集 M，有 $\mu(f^{-1}(M))=\mu(g^{-1}(M))$，則称 f 和 g 具有**同样的分布**. 容易驗証，如果 f 和 g 是具有同样分布的可积函数，若令 $F=f^{-1}(M)$，$G=g^{-1}(M)$，其中 M 是数直綫上的某一个波雷耳集，則

$$\int_F f\,d\mu=\int_G g\,d\mu.$$

在貝努里定理中，如果函数列$\{f_n\}$的任何两項都具有同样的分布，我們得到这个定理的一个特殊情形. 在这种情形下，对于每一个

正整数 n 有 $\sigma^2(f_n)=\sigma^2(f_1)$，从而有 $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(f_i)=\frac{1}{n}\sigma^2(f_1)$，因此，对于方差叙列 $\{\sigma^2(f_n)\}$ 的条件自然满足。

为了要証明較强形式的大数定律，我們要用到下面两条初等分析中的定理。

定理 2. 設 $\{y_n\}$ 是具有有限極限值 y 的实数列，則 $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = y$.

証明。对于每一个正数 ε，存在正整数 n_0 使当 $n>n_0$ 有 $|y_n-y|<\frac{\varepsilon}{2}$。設 n_1 是大于 n_0 并满足关系式

$$\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_0}|y_i-y|<\frac{\varepsilon}{2}$$

的一个正整数。如果 $n>n_1$，則

$$\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)-y\right|=\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-y)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_0}(y_i-y)\right|+\left|\frac{1}{n}\sum_{i=n_0+1}^{n}(y_i-y)\right|<$$

$$<\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_0}|y_i-y|+\frac{n-n_0}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon. \quad \blacksquare$$

定理 3. 設 $\{y_n\}$ 是一个实数列，并且級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}y_n$ 收斂，則 $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=0$.

証明。令

$$s_0=0,\quad s_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}y_i,\quad t_n=\sum_{i=1}^{n}y_i,\quad n=1,2,\cdots.$$

因为 $y_i=i(s_i-s_{i-1}), i=1,2,\cdots$，并且

$$t_{n+1}=\sum_{i=1}^{n+1} is_i-\sum_{i=1}^{n+1} is_{i-1}=-\sum_{i=1}^{n} s_i+(n+1)s_{n+1}, \quad n=1,2,\cdots,$$

所以

$$\frac{t_{n+1}}{n+1}=-\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i+s_{n+1}.$$

由于数列$\{S_n\}$趋向一个有限的極限，而根据定理2，数列$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i\right\}$趋于同一个極限，因此

$$\lim_n \frac{t_{n+1}}{n+1}=0. \quad \blacksquare$$

定理 4. 設$\{f_n\}$是具有有限方差的独立函数列，$\int f_n\, d\mu=0$，$n=1,2,\cdots$，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(f_n)}{n^2}<\infty,$$

則叙列$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i\right\}$几乎处处收斂到 0.

我們注意到，定理 4 的假設条件和結論都比定理 1 里面的为强。这个定理是**强大数定律**的一种形式.

証明. 令 $g_n(x)=\frac{1}{n}f_n(x)$, $n=1,2,\cdots$，然后对叙列$\{g_n\}$应用 §46 定理 2. 因为

$$\int g_n\, d\mu=0, \qquad n=1,2,\cdots,$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(g_n)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(f_n)}{n^2}<\infty,$$

所以級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_n(x)$$

几乎处处收斂。应用定理 3 即得結論。

(1) 两个可测函数具有同样的分布，其必要和充分条件是：它們具有同一个分布函数(参看 18.11)。

(2) 設$\{\sigma_i^2\}$是一个非負实数列，m 和 n 是两个正整数，并且 $m<n$，則

$$\frac{\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2}{n^2}\leqslant\frac{\sigma_1^2+\cdots+\sigma_m^2}{n^2}+\frac{\sigma_{m+1}^2}{(m+1)^2}+\cdots+\frac{\sigma_n^2}{n^2}.$$

利用这个不等式可以說明，定理 4 的假設条件并不比定理 1 的假設条件为弱．事实上，定理 4 的条件是較强的；这个事实可以通过具有方差

$$\sigma^2(f_n)=\frac{n+1}{\log(n+1)}$$

的独立函数列$\{f_n\}$来說明．

(3) 定理 4 中关于方差的假設条件不能再放寬了．事实上，如果$\{\sigma_n^2\}$是一个非負实数列，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2}{n^2}=\infty,$$

則存在独立函数列$\{f_n\}$，使得$\int f_n\,d\mu=0,\ \sigma^2(f_n)=\sigma_n^2,\ n=1,2,\cdots$，并使得$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i\right\}$不能几乎处处收斂到 0．(提示：作出滿足下列条件的函数 f_n：当 $\sigma_n^2\leqslant n^2$ 时，

$$\mu(\{x:f_n(x)=n\})=\mu(\{x:f_n(x)=-n\})=\frac{\sigma_n^2}{2n^2},$$

$$\mu(\{x:f_n(x)=0\})=1-\frac{\sigma_n^2}{n^2};$$

而当 $\sigma_n^2>n^2$ 时，

$$\mu(\{x:f_n(x)=\sigma_n\})=\mu(\{x:f_n(x)=-\sigma_n\})=\frac{1}{2}.$$

我們注意到，如果 $\lim_n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=0$，則有 $\lim_n\frac{1}{n}y_n=0$；然后对集 $\{x:|f_n(x)|\geqslant n\}$应用波雷耳-坎特立輔助定理．)

(4) 設$\{f_n\}$是滿足定理 4 中条件的独立函数列，則存在等价于$\{f_n\}$的独

立函数列$\{g_n\}$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma^2(g_n)}{n^2}=\infty;$$

換一句話說，强大数定律的逆命題不成立.

(5) 下述强大数定律的較弱形式的逆命題成立. 設$\{f_n\}$是独立函数列，c是一个正的常数，并且$\int f_n\,d\mu=0$，$\left|\frac{1}{n}f_n(x)\right|\leqslant c$几乎处处成立，$n=1,2,\cdots$；如果叙列$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i\right\}$几乎处处收斂到0，則对于任意正数$\varepsilon$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma^2(f_n)}{n^{2+\varepsilon}}<\infty.$$

(提示：設$\{y_n\}$是一个实数列，使得$\lim_n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=0$，或者使得数列$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right\}$为有界，則对于每一个正数$\varepsilon$，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

收斂.)

(6) 在定理4中，如果将条件$\int f_n\,d\mu=0$，$n=1,2,\cdots$换为

$$\lim_n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int f_i\,d\mu=0,$$

結論仍成立.

(7) 下面这个定理有时也称为强大数定律. 設$\{f_n\}$是具有同样分布的独立可积函数列，并且$\int f_n\,d\mu=0$，則几乎处处有$\lim_n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i=0$. 下面一系列命題的目的在于引导我們証明这个定理.

(7a) 如果$E_n=\{x:|f_1(x)|\leqslant n\}$，則$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_{E_n}f_1^2\,d\mu<\infty$. (提示：以$\chi_n$表示$E_n$的特征函数，并令$g=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\chi_n f_1^2$. 如果$k-1<|f_1(x)|\leqslant k$，則对于一切$n<k$有$\chi_n(x)=0$；于是有$|g(x)|<|f_1(x)|$，因而$g$是可积

的.)

(7b) 如果 $F_n=\{x: |f_n(x)|\leqslant n\}$, 并且 $g_n=\chi_{F_n}f_n$, 則独立函数列$\{g_n\}$等价于$\{f_n\}$.

(7c) $\lim_n\sum_{i=1}^{n}\int g_i\,d\mu=0$. (提示: $\int g_i\,d\mu=\int_{F_i}f_i\,d\mu=\int_{E_i}f_1 d\mu$, 而$\{E_i\}$是可測集的增叙列, 它的併集是 X(参看定理 2).)

(7d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sigma^2(g_n)<\infty$. (提示: 注意到$\int g_n^2\,d\mu=\int_{F_n}f_n^2\,d\mu=\int_{E_n}f_1^2\,d\mu$, 并应用(7a)說明級数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int g_n^2\,d\mu$收斂; 級数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\int g_n\,d\mu\right)^2$的收斂性可由关系式

$$\left(\int g_n\,d\mu\right)^2\leqslant\left(\int |f_1|\,d\mu\right)^2$$

推出.)

(8) 在(7)中所述的强大数定律, 它的逆定理成立: 設$\{f_n\}$是具有同樣分布的独立函数列, 并且$\lim_n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i=0$ 几乎处处成立, 則f_n是可积的。(提示: 由$\lim_n\frac{1}{n}f_n=0$ 几乎处处成立这一个条件, 再加上波雷耳-坎特立輔助定理, 就可以推出級数$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{x: |f_n(x)|>n\})$ 的收斂性. 然后注意到$\mu(\{x: |f_n(x)|>n\})=\mu(\{x: |f_1(x)|>n\})$, 并应用 27.4.)

(9) 对于拉德馬海尔函数列应用强大数定律, 我們得到波雷耳关于**正規数**的著名定理: 在单位区間中的几乎每一个数, 它的二进位展开式中包含同样数目的 0 和 1. 对于任意 r 进位展开式($r\geqslant 3$), 类似的結論也成立; 我們得到关于**絕对正規数**的定理: 几乎每一个数对于一切基 r 都同时是正規的.

§48. 条件概率和条件数学期望

設 E 和 F 是概率空間$(X,\mathbf{S},\mu)$中的可測集; 如果 $\mu(F)\neq 0$, 我們已經由等式

$$\mu_F(E)=\frac{\mu(E\cap F)}{\mu(F)}$$

定义了 E 在条件 F 下的条件概率(参看 §44 和 45.1)，并且也已經稍稍探討了一下它对于 F 的依賴性。現在我們要研究，$\mu_F(E)$ 究竟如何地依賴于 F。設 F 是使得 $\mu(F)$ 和 $\mu(F')$ 都不为 0 的一个集；考虑只包含两个点 y_1 和 y_2 的可測空間 Y(这里 Y 的一切子集都了解为可測集)，并定义 X 在 Y 中的一个可測变换 T 如下：若 $x\in F$，则 $T(x)=y_1$，若 $x\in F'$，则 $T(x)=y_2$。对于 Y 的每一个子集 A，令

$$\nu_E(A)=\mu(E\cap T^{-1}(A)) \quad 和 \quad \nu(A)=\nu_X(A)=\mu(T^{-1}(A)),$$

則显然有

$$\mu_F(E)=\frac{\nu_E(\{y_1\})}{\nu(\{y_1\})} \qquad 和 \qquad \mu_{F'}(E)=\frac{\nu_E(\{y_2\})}{\nu(\{y_2\})}.$$

換一句話說，条件概率可以看作定义在 Y 上的一个可測函数——不严格地說，这个函数就是測度 ν_E 和 ν 的比。

将上段的論点加以推广，設 $\{F_1,\cdots,F_n\}$ 是具有正測度的不相交可測集的一个有限类，并且 $\bigcup_{i=1}^n F_i=X$；考虑由 n 个点 $y_1,\cdots,y_n$ 組成的可測空間 Y。如果当 $x\in F_i$ 时令 $T(x)=y_i$, $i=1,\cdots,n$，則 T 是 X 在 Y 中的一个可測变换，于是条件概率又可以表为定义在 Y 上的两个測度之比。根据以上的考虑，我們引进下列一般的定义。設 T 是概率空間 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 在可測空間 $(Y,\mathbf{T})$ 中的可測变换；如果 E 和 F 分別是 X 和 Y 中的可測集，令 $\nu_E(F)=\mu(E\cap T^{-1}(F))$，則 ν_E 和 $\mu T^{-1}(=\nu_X)$ 显然是 $\mathbf{T}$ 上的測度，并且 $\nu_E\ll\mu T^{-1}$。根据拉东-尼古丁定理，存在定义在 Y 上的可积函数 p_E，使得对于 $\mathbf{T}$ 中每一个 F，有

$$\mu(E\cap T^{-1}(F))=\int_F p_E(y)\,d\mu T^{-1}(y);$$

函数 p_E 在 $[\mu T^{-1}]$ 的意义下是唯一确定的。我們称 $p_E(y)$ 为 **E 在条件 y 下的条件概率**，或者称为 E 在条件 $T(x)=y$ 下的条件概率。有时我們称 $p_E(T(x))$ 这个数为“在已給的值 $T(x)$ 下 E 的条

件概率"。我們通常将 $p_E(y)$ 記为 $p(E,y)$；而当我們必須将 p 作为第一个主目元 E 的函数来考慮时，則記为 $p^y(E)=p(E,y)$。

如果集 F 滿足条件 $\mu(T^{-1}(F))\neq 0$，則将借以定义 p 的等式两端各除以 $\mu(T^{-1}(F))$，我們得到关系式

$$\mu_{T^{-1}(F)}(E)=\frac{\mu(E\cap T^{-1}(F))}{\mu(T^{-1}(F))}=$$

$$=\frac{1}{\mu(T^{-1}(F))}\int_F p(E,y)d\mu T^{-1}(y).$$

因为上式最左端的一項是 E 在条件 $T^{-1}(F)$ 下的条件概率，所以，从形式上来看，我們似乎可以說：当"F 縮成 y"时，左端应該趋向 E 在条件 y 下的条件概率，而右端則应該趋向被积函数 $p(E,y)$。利用拉东-尼古丁定理可以使这种說法严格化。

定理 1. 設 E 是 X 中任意固定的可測集，則

$$0\leqslant p(E,y)\leqslant 1[\mu T^{-1}];$$

設 $\{E_n\}$ 是 X 中不相交可測集的任意固定的叙列，則

$$p(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,y)=\sum_{n=1}^{\infty}p(E_n,y)\quad[\mu T^{-1}].$$

証明。因为对于 Y 中每一个可測集 F，有 $0\leqslant\mu(E\cap T^{-1}(F))\leqslant 1$，由此即得定理里的不等式。为了証明定理里的等式，首先注意到

$$\int_F p(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,y)d\mu T^{-1}(y)=\mu((\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)\cap T^{-1}(F))=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n\cap T^{-1}(F))=\sum_{n=1}^{\infty}\int_F p(E_n,y)d\mu T^{-1}(y)=$$

$$=\int_F\left(\sum_{n=1}^{\infty}p(E_n,y)\right)d\mu T^{-1}(y),$$

然后应用拉东-尼古丁定理中关于唯一性的部分。

定理 1 指出，函数 p^y 在某些方面很像是一个測度。我們还可

以得到更多的与测度相类似的性質，例如，我們可以証明：$p(X, y)=1[\mu T^{-1}]$；如果 $E_1 \subset E_2$，則有 $p(E_1, y) \leqslant p(E_2, y)[\mu T^{-1}]$；如果 $\{E_n\}$ 是 X 中可測集的減敘列，則

$$p(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n, y)=\lim_n p(E_n, y)[\mu T^{-1}].$$

但是我們必須記住，在那些測度为零的集上，对应的关系式不能成立，而測度为零的集与集 E_i 的选擇有关，因此，在一般的場合，我們不能够說，对于 y 的几乎一切的值，p^y 是一个測度。

前面我們用来定义 $p(E,y)$ 的等式也可以写成下列形式：

$$\int_{T^{-1}(F)} \chi_E(x) d\mu(x)=\int_F p(E, y) d\mu T^{-1}(y).$$

在更一般的場合，如果 f 是定义在 X 上的任意可积函数，則对于 Y 中一切可測集 F，由等式

$$\nu(F)=\int_{T^{-1}(F)} f(x)\, d\mu(x)$$

确定的不定积分 ν 可以看作是定义在 $\mathbf{T}$ 上的一个广义测度。显然，$\nu \ll \mu T^{-1}$，因此，根据拉东-尼古丁定理，存在定义在 Y 上的可积函数 e_f，使得对于 $\mathbf{T}$ 中每一个 F，有

$$\int_{T^{-1}(F)} f(x)\, d\mu(x)=\int_F e_f(y)\, d\mu T^{-1}(y);$$

函数 e_f 在 $[\mu T^{-1}]$ 的意义下是唯一确定的。我們称 $e_f(y)$ 为 **f 在条件 y 下的条件数学期望**；我們有时也将 $e_f(y)$ 記为 $e(f,y)$。

因为 p 和 e 之間的关系与一个測度和不定积分之間的关系相类似，所以像下面这样的等式似乎应該成立：

$$e(f,y)=\int f(x) dp^y(x).$$

但是一般說来 p^y 不一定是一个測度，因此上式右端的积分可能是没有定义的。

定理 2. 設 f 是定义在 Y 上的可积函数，則 fT 是定义在 X 上的可积函数，并且 $e(fT, y)=f(y)$。

証明．根据 §39 定理 3，fT 是可积的，并且对于 T 中每一个 F，有

$$\int_{T^{-1}(F)} f(T(x))\, d\mu(x) = \int_F f(y)\, d\mu T^{-1}(y).$$

(1) 考慮概率空間 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 和 $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ 的笛卡兒乘积空間 $(X\times Y, \mathbf{S}\times\mathbf{T}, \mu\times\nu)$. 如果 $T(x,y)=x$，則 T 是 $X\times Y$ 在 X 上的一个可測变換. 对于 $X\times Y$ 中每一个可測集 E，等式 $p(E,x)=\nu(E_x)[\mu]$ 成立；在这种情形下，p_E 对于每一个 E 有定义，因此，对于任意的 x，p^x 是一个測度.

(2) 設 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 和 $(Y,\mathbf{T},\nu)$ 是两个概率空間，λ 是 $\mathbf{S}\times\mathbf{T}$ 上的測度，滿足条件 $\lambda\ll\mu\times\nu$；例如，令 $\lambda(E)=\int_E fd(\mu\times\nu)$. 如果 $T(x,y)=x$，則对于 $X\times Y$ 中每一个可測集 E，有

$$p(E,x)=\int\chi_E(x,y)f(x,y)d\,\nu(y)[\mu].$$

(3) 設 T 是概率空間 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 在可測空間 $(Y,\mathbf{T})$ 中的可測变換，則对于 Y 中每一个可測集 F，有 $p(T^{-1}(F),y)=\chi_F(y)[\mu T^{-1}]$.

(4) 要确定条件概率 $p(E,y)$，使得 p^y 对于 y 的几乎一切的值是一个測度，有时是不可能的. 下面一系列命題的目的，就在于建立一个这样的例子. 設 Y 是单位閉区間，T 是 Y 中全体波雷耳集类，ν 是 T 上的勒貝格測度. 令 $X=Y$，并設 S 是由 T 中全体集与集 M 組成的类所产生的 σ-环，其中 M 是具有下述性質的一个集：M 本身及其余集 M' 都是 Y 中的濃厚集. 令

$$\mu((A\cap M)\cup(B\cap M'))=\nu(A),$$

其中 A 和 B 屬于 T，則 μ 是定义在 S 上的一个測度；現在我們考慮由等式 $T(x)=x$ 确定的，X 在 Y 上的变換 T. 假定在 T 中存在一个測度为零并且具有下述性質的集 C_0：当 $y\,\epsilon'\,C_0$ 时，p^y 是 S 上的一个測度.

(4a) 如果 $D_0=\{y: p(M,y)\neq 1\}$，則 $\nu(D_0)=0$.

(4b) 設 E_0 是由一切这样的点 y 組成的集：等式 $p(T^{-1}(F),y)=\chi_F(y)$ 不能对于 T 中一切的 F 恒成立；則 $\nu(E_0)=0$. (提示：設 R 是一个可列环使得 S(R)=T. 对于 R 中每一个 F，令

$$E_0(F)=\{y: p(T^{-1}(F),y)\neq\chi_F(y)\},$$

則 $\nu(E_0(F))=0$. 注意利用下述事实：如果两个概率測度在 R 上相等，則它們在 T 上也相等.)

(4c) 如果 $y \epsilon' C_0 \cup D_0 \cup E_0$, 则 $y \epsilon M$. (提示: 因为 $p(M,y)=1$, $p(T^{-1}(\{y\}),y)=1$, 并且 p^y 是一个测度, 所以

$$p(M \cap T^{-1}(\{y\}),y)=1.)$$

由(4c)可知, 测度为 1 的波雷耳集 $C_0' \cap D_0' \cap E_0'$ 被集 M 所包, 这与 M' 为濃厚集的假定相矛盾.

(5) 設 X 是数直綫, μ 是定义在 X 中全体波雷耳集类 $\mathbf{S}$ 上的概率测度, T 是 X 在可测空間$(Y,\mathbf{T})$中的可测变换, 則可以确定条件概率 $p(E,y)$, 使得 p^y 对于 y 的几乎一切的值是一个测度. (提示: 令 $q(x,y)=p((-\infty,x),y)$. 在 Y 中存在可测集 C_0, 滿足下面几个条件: $\mu T^{-1}(C_0)=0$; 若 $y \epsilon' C_0$, 則 q^y 是定义在 X 中全体有理数集上的单調函数; 对于每一个有理数 x, $\lim_n q^y\left(x-\frac{1}{n}\right)=q^y(x)$. 設 $\bar{q}^y$ 是定义在 X 上从左边連續的单調函数, 并且当 x 为有理数时 $\bar{q}^y$ 与 q^y 相等; 又設 $\bar{p}^y$ 是定义在 $\mathbf{S}$ 上由等式 $\bar{p}^y((-\infty,x))=\bar{q}^y(x)$ 确定的测度. 令 $\bar{p}(E,y)=\bar{p}^y(E)$.)

(6) 設 T 是概率空間$(X,\mathbf{S},\mu)$在可测空間$(Y,\mathbf{T})$中的可测变换. 如果条件概率 $p(E,y)$ 能够被确定, 使得 p^y 对于 y 的几乎一切的值是一个测度, 則对于定义在 X 上的每一个可积函数 f, 有

$$e(f,y)=\int f(x)\,dp^y(x) \quad [\mu T^{-1}].$$

(提示: 如果 f 是可测集的特征函数, 則等式成立.)

(7) 設 T 是概率空間$(X,\mathbf{S},\mu)$在可测空間$(Y,\mathbf{T})$中的可测变换. 如果 f 是对于 μ 为可积的函数, g 是对于 μT^{-1} 为可积的函数, 并設由等式 $h(x)=f(x)g(T(x))$ 定义的函数 h 在 X 上为可积, 則

$$e(h,y)=e(f,y)g(y) \quad [\mu T^{-1}].$$

§49. 乘积空間上的测度

考虑下面的問題. 是否存在独立随机变数的叙列, 这些随机变数具有預先指定的分布? 确切地說, 如果$\{\mu_n\}$是定义在数直綫中全体波雷耳集类上的概率测度叙列, 則是否存在概率空間$(X,\mathbf{S},\mu)$以及定义在 X 上的独立函数叙列$\{f_n\}$, 使得对于任意波雷耳集 E 和任意正整数 n, 有 $\mu(f_n^{-1}(E))=\mu_n(E)$? 更一般地說, 如果

$\{(X_n, \mathbf{S}_n, \mu_n)\}$是概率空間的叙列，則是否存在概率空間$(X, \mathbf{S}, \mu)$，并且，对于每一个正整数$n$，是否存在$X$在$X_1\times\cdots\times X_n$中的可測变換$T_n$，使得$\mu T_n^{-1}=\mu_1\times\cdots\times\mu_n$？对于这些問題，§38 定理 2 都給出了肯定的回答。

独立性是概率論中最重要的概念之一，但同时也应該着重地指出，在概率論中所考虑的随机变数，不能只限于是互相独立的。本节的主要目的，是要表述并証明关于非独立随机变数的一个定理，这个定理是和关于独立随机变数的 §38 定理 2 相对应的；换一句話說，这个定理断言，具有預先指定的分布的随机变数叙列必定存在。然而，和 §38 定理 2 有所不同，本节的定理只适用于一致有界实値函数的場合；换一句話說，我們所要考虑的乘积空間，它的每一个因子都是单位区間。定理本身及其証明都可以扩充到更为一般的場合，但都需依賴于拓扑学方面的概念。要想不用到任何拓扑方面的条件，看来是不可能的；和下面定理 1 相类似的測度論方面的定理，已經被証明不能成立。

設对于每一个正整数n，X_n是单位閉区間而$\mathbf{S}_n$是X_n中的全体波雷耳集类，并令$(X, \mathbf{S})=\times_{n=1}^{\infty}(X_n, \mathbf{S}_n)$。又設$\mathbf{F}_n$是由$X$中全体可測$\{1, \cdots, n\}$-柱面組成的$\sigma$-环，$\mathbf{F}(=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbf{F}_n)$是由$X$中全体可測的有限維子集組成的环（参看 §38）。

定理 1. 設μ是定义在$\mathbf{F}$上的集函数，并設对于每一个正整数n，μ是$\mathbf{F}_n$上的一个概率測度，則在$\mathbf{S}$上存在唯一的一个μ的扩張，这个扩張是一个概率測度。

証明. 定义X在可測空間$Y_n=\times_{i=1}^{n}X_i$上的可測变換T_n如下：

$$T_n(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots)=(x_1, \cdots, x_n), \qquad n=1, 2, \cdots;$$

对于Y_n中每一个可測集A，令$\nu_n(A)=\mu(T_n^{-1}(A))$。如果$\{E_i\}$是$\mathbf{F}$中集的遞減叙列使得$0<\varepsilon\leqslant\mu(E_i)$，$i=1, 2, \cdots$，則对于每一个固定的$i$，存在正整数$n$以及$Y_n$中的波雷耳集$A_i$，使得$E_i=$

$T_n^{-1}(A_i)$。設 B_i 是 A_i 的閉子集，滿足关系式

$$\nu_n(A_i-B_i)\leqslant\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

令 $F_i=T_n^{-1}(B_i)$，則 F_i 是乘积空間 X 的一个紧子集(对于乘积空間 X 的拓扑結构)，并且 $\mu(E_i-F_i)\leqslant\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$。令 $G_k=\bigcap_{i=1}^k F_i$，則 $\{G_k\}$是 X 的紧子集的一个遞減叙列。因为

$$\mu(E_k-G_k)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^k(E_k-F_i)\right)\leqslant\mu\left(\bigcup_{i=1}^k(E_i-F_i)\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

于是

$$\mu(G_k)=\mu(E_k)-\mu(E_k-G_k)\geqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

因而有 $G_k\neq 0, k=1,2,\cdots$。由于非空紧集的遞減叙列具有非空的交集，因此 μ 在 0 是上連續的，从而具有可列可加性；应用 §13 定理 1 即得結論。 ▌

沿用上面引进的記号，我們現在証明单位区間的乘积空間的一个有趣的性質。

定理 2. 对于 X 中每一个可測集 E，有

$$\lim_n p(E, T_n(x))=\chi_E(x)\quad[\mu];$$

换一句話說，对于一切的 x(可能要除去一个測度为零的集)，在 x 的最前面 n 个坐标的給定值之下，E 的条件概率按照 $x\in E$ 或 $x\in' E$ 而收斂到 0 或 1。

証明。証明几乎一致收斂性比証明几乎处处收斂性来得方便；按照 §21 定理 1 和定理 2，这两种收斂性是等价的。設 ε 是任意正数，δ 是小于 1 的任意正数。根据 §13 定理 4，存在正整数 n_0 和可測$\{1,\cdots,n_0\}$-柱面 E_0，使得

$$\mu(E\Delta E_0)<\frac{\varepsilon\delta}{2}.$$

令 $B=E\Delta E_0$，我們注意到，如果 $x\in' B$，則

$$\chi_E(x) = \chi_{E_0}(x).$$

令

$$C_n = \{x : p(B, T_n(x)) \geqslant \delta\}, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$
$$D_n = C_n - \bigcup_{1 \leqslant i < n} C_i,$$

并令

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n,$$

则对于每一个 n, C_n 和 D_n 都是可测$\{1, \cdots, n\}$-柱面。于是有

$$\mu(B \cap D_n) = \int_{D_n} p(B, T_n(x))\, d\mu(x) \geqslant \delta\, \mu(D_n),$$

从而有

$$\frac{\varepsilon\delta}{2} > \mu(B) \geqslant \mu(B \cap C) = \mu(B \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap D_n) \geqslant \delta \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) =$$
$$= \delta\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) = \delta\mu(C).$$

如果令 $A = B \cup C$, 则

$$\mu(A) \leqslant \frac{\varepsilon\delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

因为

$$|p(E, T_n(x)) - p(E_0, T_n(x))| \leqslant p(E \Delta E_0, T_n(x)) \ [\mu],$$
$$n = 1, 2, \cdots,$$

所以我們可以假定，这些不等式对于 X 中一切 x 都成立。如果 $n \geqslant n_0$, 根据 §38 定理 1 和 §48 定理 2，有

$$|p(E, T_n(x)) - \chi_{E_0}(x)| \leqslant p(B, T_n(x)).$$

如果再假定 $x \in' A$, 则有 $\chi_{E_0}(x) = \chi_E(x)$和 $p(B, T_n(x)) < \delta$, 因此 $|p(E, T_n(x)) - \chi_E(x)| < \delta$. ▌

(1) 設$\{(X_n, \mathbf{S}_n, \mu_n)\}$是概率空間的叙列, $(X, \mathbf{S}) = \mathbf{X}_{n=1}^{\infty}(X_n, \mathbf{S}_n)$, μ是定义在 $\mathbf{F}$ 上的集函数，并且对于每一个正整数 n, μ 是 $\mathbf{F}_n$ 上的一个概率测度。如果在每一个 $\mathbf{F}_n$ 上，μ 对于乘积測度$\mathbf{X}_{i=1}^{\infty}\mu_i$ 是絕对連續的，則在 $\mathbf{S}$

上存在 μ 的唯一的一个扩張，这个扩張是一个概率测度.（提示：参看 §38 定理 2 的証明.）这个結果和証明的方法可以扩充到一切滿足下述条件的場合：条件概率 $p(E,T_n(x))$ 能够被确定，使得对于几乎每一个固定的 x，它們是在每一个 $\mathbf{F}_k$ 上的概率测度.

(2) 如果 X_n 是紧度量空間，定理 1 仍然成立，并且定理的叙述和証明都保持不变. 于是，若每一个 X_n 都是数直綫，则通过紧化的步驟很容易証明定理 1 仍然成立. 对于任意的紧空間，定理 1 是否成立?

(3) 沿用(1)中的記号，我們现在給出一个例子，說明定理 1 在 X_n 不是区間的場合下不一定成立. 設 Y 是单位区間，$\mathbf{T}$ 是 Y 中的全体波雷耳集类，ν 是 $\mathbf{T}$ 上的勒貝格测度. 設 $\{X_n\}$ 是 Y 中濃厚子集的遞减叙列，并且 $\bigcap_{n=1}^{\infty}X_n=0$. 令 $\mathbf{S}_n=\mathbf{T}\cap X_n$；如果 $E\in\mathbf{S}_n$，即 $E=F\cap X_n$，其中 $F\in\mathbf{T}$，則令 $\mu_n(E)=\nu(F)$. 設 $(X,\mathbf{S})=\mathsf{X}_{n=1}^{\infty}(X_n,\mathbf{S}_n)$；对于每一个正整数 n，設 S_n 是由等式

$$S_n(x_n)=(z_1,\cdots,z_n),\qquad z_i=x_n,\qquad i=1,\cdots,n$$

确定的，X_n 在 $X_1\times\cdots\times X_n$ 中的可测变换.

(3a) 对于 X 中每一个可测 $\{1,\cdots,n\}$-柱面

$$E=A\times X_{n+1}\times X_{n+2}\times\cdots,\qquad A\in\mathbf{S}_1\times\cdots\times\mathbf{S}_n,$$

令 $\mu(E)=\mu_n(S_n^{-1}(A))$. 于是，集函数 μ 在 $\mathbf{F}$ 上具有确定的定义，并且，对于每一个正整数 n，μ 是 $\mathbf{F}_n$ 上的一个概率测度.

(3b) 設 E_i 是 X 中一切具有下述性質的点 $(x_1,x_2,\cdots)$ 組成的集：$(x_1,x_2,\cdots)$ 的最前面 i 个坐标彼此相等，$i=1,2,\cdots$，則 $E_i\in\mathbf{F}_i$.（提示：令

$$D_i=\{(y_1,\cdots,y_i):y_1=\cdots=y_i\},$$

則 D_i 是 Y 与其本身构成的 i 維笛卡兒乘积空間的一个可测子集，并且

$$E_i=(D_i\cap(X_1\times\cdots\times X_i))\times X_{i+1}\times X_{i+2}\times\cdots.)$$

(3c) 定义在 $\mathbf{F}$ 上的集函数 μ 在 0 不是上連續的.（提示：在(3b)中定义的集 E_i，$i=1,2,\cdots$，具有下列性質：$\mu(E_i)=1$，$\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i=0$.）

(4) 零一律 (46.3) 是定理 2 的一个特殊情形. 事实上，如果 E 是一个 J_n-柱面而 F 是 Y_n 的一个可测子集，則 $T_n^{-1}(F)$ 是一个 $\{1,\cdots,n\}$-柱面，并且有

$$\mu(E\cap T_n^{-1}(F))=\mu(E)\mu T_n^{-1}(F)=\int_F\mu(E)d\mu_n,$$

因此，$p(E,T_n(x))$几乎处处$[\mu]$等于常数$(=\mu(E))$。根据定理2，$\chi_E(x)=\mu(E)[\mu]$，所以$\mu(E)$等于0或1.

第 十 章

局部紧空間

§50. 一些拓扑学方面的定理

在本节中我們要介紹一些拓扑学方面的結果，由于它們的性質比較特殊，这些結果在拓扑学的書里通常是沒有的。

在整个这一章里，除特别指明的場合外，我們总是假定 X 是一个局部紧的豪司道夫空間。我們以記号 $\mathscr{F}$ 表示由定义在 X 上滿足下列条件的一切实值連續函数 f 組成的类：对于 X 中一切的 x，$0\leqslant f(x)\leqslant 1$。

定理 1. 設 C 是紧集，U 和 V 是两个开集，并且 $C\subset U\cup V$，則存在紧集 D 和 E，使得 $D\subset U, E\subset V$，并且 $C=D\cup E$。

証明。因为 $C-U$ 和 $C-V$ 是不相交的紧集，所以存在不相交的开集 $\widetilde{U}$ 和 $\widetilde{V}$ 使得 $C-U\subset\widetilde{U}$ 和 $C-V\subset\widetilde{V}$；令 $D=C-\widetilde{U}$，并令 $E=C-\widetilde{V}$。容易看出，D 和 E 都是紧集，并且 $D\subset U, E\subset V$。由于 $\widetilde{U}\cap\widetilde{V}=0$，我們有

$$D\cup E=(C-\widetilde{U})\cup(C-\widetilde{V})=C-(\widetilde{U}\cap\widetilde{V})=C. \quad \blacksquare$$

定理 2. 設 C 是紧集，F 是閉集，并且 $C\cap F=0$，則在 $\mathscr{F}$ 中存在滿足下列条件的函数 f：当 $x\in C$ 时，$f(x)=0$，当 $x\in F$ 时，$f(x)=1$。

証明。由于 X 是完备正則空間，因此，对于 C 中每一个点 y，存在 $\mathscr{F}$ 中的函数 f_y，滿足下列条件：$f_y(y)=0$，而当 $x\in F$ 时，$f_y(x)=1$。因为由一切形如 $\{x: f_y(x)<\frac{1}{2}\}$ 的集組成的类（其中 $y\in C$）

是C的一个开复盖，而C是一个紧集，所以存在C的有限子集$\{y_1, \cdots, y_n\}$使得

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{x: f_{y_i}(x) < \frac{1}{2}\right\}.$$

令 $g(x) = \prod_{i=1}^{n} f_{y_i}(x)$，則$g \in \mathscr{F}$；因为对于$X$中一切$x$和$C$中一切$y$，有$0 \leqslant f_y(x) \leqslant 1$，于是，当$x \in C$时，$g(x) < \frac{1}{2}$，而当$x \in F$时，$g(x) = 1$。容易驗証，若令$f = (2g-1) \cup 0$，則$f \in \mathscr{F}$，并且当$x \in C$时，$f(x) = 0$，而当$x \in F$时，$f(x) = 1$。 ▌

有时我們不但需要知道，像在定理2里指出的，在C上恒等于零的函数$f(\in \mathscr{F})$是否存在，同时还需要知道，是否能够选擇f使它在别处恒不等于零。一般說来这是不可能的，下面的定理就这个問題給出了恰切的解答。

定理 3. 設f是X上的实值連續函数，c是一个实数，則集

$$\{x: f(x) \geqslant c\}, \qquad \{x: f(x) \leqslant c\} \qquad \text{和} \qquad \{x: f(x) = c\}$$

都是閉的G_δ集。反之，如果C是紧G_δ集，則存在F中的函数f，使得$C = \{x: f(x) = 0\}$。

証明。因为

$$\{x: f(x) \geqslant c\} = \{x: -f(x) \leqslant -c\},$$
$$\{x: f(x) = c\} = \{x: f(x) \geqslant c\} \cap \{x: f(x) \leqslant c\},$$

所以只須考虑集$\{x: f(x) \leqslant c\}$。根据函数f的連續性，$\{x: f(x) \leqslant c\}$是閉集；同时，对于每一个$n = 1, 2, \cdots$，$\{x: f(x) < c + \frac{1}{n}\}$是开集。由等式

$$\{x: f(x) \leqslant c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x: f(x) < c + \frac{1}{n}\right\}$$

可知，$\{x: f(x) \leqslant c\}$是G_δ集。

反之，設$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$，其中$C$是紧集而$\{U_n\}$是开集的叙列。根据定理2，对于每一个$n = 1, 2, \cdots$，存在$\mathscr{F}$中的函数$f_n$，滿足下

列条件：当 $x\in C$ 时，$f_n(x)=0$，当 $x\in X-U_n$ 时，$f_n(x)=1$。令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}f_n(x),$$

則 $f\in\mathscr{F}$，并且当 $x\in C$ 时有 $f(x)=0$。对于 $X-C$ 中任意的 x，至少存在一个正整数 n 使得 $x\in X-U_n$；由此可見，若 $x\in X-C$，則 $f(x)\geqslant\frac{1}{2^n}f_n(x)=\frac{1}{2^n}>0$，因此 $C=\{x:f(x)=0\}$。 ▌

定理 4. 設 C 是緊集，U 是开集，并且 $C\subset U$，則存在緊 G_δ 集 C_0，并存在 σ-緊开集 U_0，使得

$$C\subset U_0\subset C_0\subset U.$$

証明。因为滿足条件 $C\subset V\subset U$ 的有界开集 V 必定存在，所以我們可以假定 U 是有界集而不致丧失普遍性。設 f 是 $\mathscr{F}$ 中的函数，滿足下列条件：当 $x\in C$ 时，$f(x)=0$，而当 $x\in X-U$ 时，$f(x)=1$（定理 2）；令

$$U_0=\left\{x:f(x)<\frac{1}{2}\right\},\qquad C_0=\left\{x:f(x)\leqslant\frac{1}{2}\right\}.$$

显然，$C\subset U_0\subset C_0\subset U$；根据定理 3，$C_0$ 是一个閉的 G_δ 集。因为 U 是有界的，所以 C_0 是緊的；由等式

$$U_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x:f(x)\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}\right\}$$

可知，U_0 是 σ-緊的。 ▌

定理 5. 設 X 是可分的，則 X 的每一个緊子集 C 是 G_δ 集。

証明。对于 X 中不屬于 C 的任意点 x，存在两个不相交的开集 $U(x)$ 和 $V(x)$，使得 $C\subset U(x)$，$x\in V(x)$。因为 X 是可分的，而类 $\{V(x):x\in' C\}$ 是 $X-C$ 的一个开复盖，所以存在 X 中点的叙列 $\{x_n\}$ 使得

$$X-C\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}V(x_n).$$

于是有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}U(x_n)\supset C\supset\bigcap_{n=1}^{\infty}(X-V(x_n))\supset\bigcap_{n=1}^{\infty}U(x_n).$$ ▌

(1) 定理 2 也可以按照下面的方式来証明. 补上一个点, 使 X 紧化; 利用下述事实: 每一个紧豪司道夫空間是正規空間. 于是, 对于紧豪司道夫空間的任意两个不相交的閉子集 C 和 D, 存在 $\mathscr{F}$ 中的函数 f, 满足下列条件: 当 $x\in C$ 时, $f(x)=0$, 而当 $x\in D$ 时, $f(x)=1$.

(2) 定理 3 可以用来証明下述結果. 全体紧 G_δ 集类封閉于有限併与可列交的运算. 这个結果直接証明起来也很容易.

(3) 設 X 是一个不可列的离散空間, X^* 是由 X 补上了一个点 x^* 而得到的紧空間, 則单点集 $\{x^*\}$ 是一个紧集, 但不是 G_δ 集.

(4) 設 I 是任意不可列集; 对于 I 中每一个 i, 設 X_i 是由两个实数 0 和 1 构成的(紧豪司道夫)空間; 并設以 X 表示笛卡兒乘积空間 $\times_i X_i$.

(4a) X 中每一个单点集是紧集, 但不是 G_δ 集.

(4b) 設 E 是 X 的子集, 如果存在 I 的可列子集 J 使得 E 是一个 J-柱面(参看 38.2), 我們称 E 是一个 $\aleph_0$-集. X 中的紧集 C 是一个 G_δ 集, 当而且只当它是一个 $\aleph_0$-集. (提示: 如果 C 是紧集, U 是开集, 并且 $C\subset U$, 則根据 X 中拓扑結构的定义, 有 $C\subset U_0\subset U$, 其中 U_0 是 X 中的开集同时又是一个 J-柱面, J 是 I 的某一个有限子集.)

(4c) 設 f 是定义在 X 上的任意实值連續函数, M 是数直綫上的任意波雷耳集, 則 $f^{-1}(M)$ 是一个 $\aleph_0$-集.

(5) 設 X^* 和 Y^* 分别是由一个离散的可列無限空間和一个不可列离散空間补上一个点(x^* 和 y^*)而得到的紧空間. 局部紧豪司道夫空間 $(X^*\times Y^*)-\{(x^*,y^*)\}$ 的子集

$$(\{x^*\}\times Y^*)-\{(x^*,y^*)\} \quad \text{和} \quad (X^*\times\{y^*\})-\{(x^*,y^*)\}$$

可以用来說明, 定理 2 中 C 为紧集的条件是不可少的.

(6) 在局部紧豪司道夫空間中, 全体 σ-紧开集类构成一个基 (参看定理 4).

§51. 波雷耳集和貝尔集

函数的可測性和連續性之間的关系是十分有趣的, 在局部紧空間的場合下它們被研究得最为透徹. 我們仍假定所考虑的是一个固定的局部紧豪司道夫空間 X; 在这一节里我們要介紹关于

X 中可測性理論的基本概念和結論。

我們以 **C** 表示由 X 的一切紧子集組成的类，以 **S** 表示由 **C** 产生的 σ–环，以 **U** 表示屬于 **S** 的全体开集类。**S** 里的集称为 X 的**波雷耳集**；因而 **U** 可以定义为全体开的波雷耳集类。定义在 X 上的实值函数如果对于 σ–环 **S** 是可測的，則称为**波雷耳可測函数**（或簡称为**波雷耳函数**）。

定理 1. 每一个波雷耳集是 σ–有界的；每一个 σ–有界开集是波雷耳集。

証明。每一个紧集显然是有界的，因而是 σ–有界的。由一切 σ–有界集組成的类是一个 σ–环；因为这个 σ–环包含 **C**，所以它也包含由 **C** 产生的 σ–环。

反之，設 U 是开集而 $\{C_n\}$ 是紧集的叙列使得

$$U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = K.$$

因为 $C_n - U$ 是紧集，$n=1, 2, \cdots$，于是有

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n - U) \in \mathbf{S};$$

由于 $D = K - U$，所以 $U = K - (K - U) \in \mathbf{S}$. ∎

我們以 $\mathbf{C}_0$ 表示由 X 中一切紧 G_δ 集組成的类，以 $\mathbf{S}_0$ 表示由 $\mathbf{C}_0$ 产生的 σ–环，以 $\mathbf{U}_0$ 表示屬于 $\mathbf{S}_0$ 的全体开集类。$\mathbf{S}_0$ 里的集称为 X 的**貝尔集**；因而 $\mathbf{U}_0$ 可以定义为全体开的貝尔集类。定义在 X 上的实值函数如果对于 σ–环 $\mathbf{S}_0$ 是可測的，則称为**貝尔可測函数**（或簡称为**貝尔函数**）。

初看起来局部紧空間中測度論的研究对象似乎当然应該是波雷耳集。但是为了以下几个理由我們必須引进表面上不很自然的貝尔集概念。第一，貝尔集的理論在某些方面較波雷耳集的理論为簡单，同时关于貝尔集的理論还可以用来作为研究波雷耳集的工具（参看 §63）。其次，每一个連續函数（或在某个紧集以外恒等于零的連續函数）是貝尔可測的（参看下面的定理 2）。第三，要确定 X 的拓扑結构，必須有包含着足够多的集的 σ–环，而全体

貝尔集类是这种 σ-环中最小的一个(参看下面的定理3)。第四,在一切古典的特殊場合下,当測度論被用在拓扑空間(例如欧几里得空間)中时,波雷耳集和貝尔集的概念合而为一(参看 §50 定理 5)。

定理 2. 設 f 是 X 上的实值連續函数,并且集 $N(f)=\{x: f(x)\neq 0\}$ 是 σ-有界的,则 f 是貝尔可測函数。

証明。如果 σ-有界开集 U 是一个 F_σ 集,则必存在紧集的叙列 $\{C_n\}$ 使得 $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$。根据 §50 定理 4,对于每一个正整数 n,存在紧貝尔集 D_n 使得 $C_n\subset D_n\subset U$。由此有 $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$,因而 U 是一个貝尔集。由定理中关于 f 的假設条件可知,对于每一个实数 c,集 $N(f)\cap\{x:f(x)<c\}$ 是一个 σ-有界开集同时又是一个 F_σ 集。 ▌

定理 3. 設 $\mathbf{B}$ 是一个子基,$\hat{\mathbf{S}}$ 是包含 $\mathbf{B}$ 的 σ-环,则 $\hat{\mathbf{S}}\supset\mathbf{S}_0$。

証明。如果 C 是紧集,U 是包含 C 的开集,则存在集 E 使得 $C\subset E\subset U$ 而 E 是 $\mathbf{B}$ 中之集的有限个有限交的併集(因而 $E\in\hat{\mathbf{S}}$)。由此可見,如果 $C=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$,其中 U_n 是开集,则对于每一个 $n=1,2,\cdots$,存在 $\hat{\mathbf{S}}$ 中的集 E_n 使得 $C\subset E_n\subset U_n$;因此,$C=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\in\hat{\mathbf{S}}$。这就說明了 $\mathbf{C}_0\subset\hat{\mathbf{S}}$,由 $\mathbf{S}_0$ 的定义即得定理的結論。 ▌

貝尔集类已經定义为由紧 G_δ 集类产生的 σ-环;也許会發生这样的想法:一个紧集可能是貝尔集而不是 G_δ 集,換一句話說,在 $\mathbf{S}_0$ 里面可能会出現不屬于 $\mathbf{C}_0$ 的紧集。下面的定理說明这是不可能的。

定理 4. 每一个紧貝尔集是 G_δ 集。

証明。設 C 是 $\mathbf{S}_0$ 中的紧集;根据 §5 定理 4,存在 $\mathbf{C}_0$ 中集的叙列 $\{C_n\}$ 使得 C 屬于 σ-环 $\mathbf{S}(\{C_n\})$。根据 §50 定理 3,对于每一个 $n=1,2,\cdots$,存在 $\mathscr{F}$ 中的函数 f_n 使得 $C_n=\{x:f_n(x)=0\}$。如果对于 X 中每一对点 x 和 y,令

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|f_n(x)-f_n(y)|,$$

則有 $d(x, x)=0$, $d(x, y)=d(y, x)$ 和 $0 \leqslant d(x,y) \leqslant d(x, z)+d(z,y)$。由此可見，若以記号 $x \equiv y$ 表示 $d(x,y)=0$，則关系“$\equiv$”具有自反性，对称性和推移性，因而是一个等价关系；我們以記号 Ξ 表示全体等价类的集。对于 X 中每一个 x，以 $\xi=T(x)$ 表示包含 x 的(唯一确定的)等价类。

如果 $T(x_1)=T(y_1)$, $T(x_2)=T(y_2)$(即若 $x_1 \equiv y_1$, $x_2 \equiv y_2$)，則

$$d(x_1, x_2) \leqslant d(x_1, y_1)+d(y_1, y_2)+d(y_2, x_2)=d(y_1, y_2).$$

根据对称性，$d(y_1, y_2) \leqslant d(x_1, x_2)$，因此，$d(x_1, x_2)=d(y_1, y_2)$。由此可見，如果 $\xi_1=T(x_1)$ 和 $\xi_2=T(x_2)$ 是 Ξ 的两个元素，則等式 $\delta(\xi_1, \xi_2)=d(x_1, x_2)$ 無歧义地确定了数 $\delta(\xi_1, \xi_2)$。因为当 $\delta(\xi_1, \xi_2)=0$ 时必有 $\xi_1=\xi_2$，所以函数 δ 是 Ξ 上的一个度量。設 $\xi_0=T(x_0)$ 是度量空間 Ξ 中任意一点，r_0 是任意正数，并令 $E=\{\xi: \delta(\xi_0, \xi)<r_0\}$，則 $T^{-1}(E)=\{x: d(x_0, x)<r_0\}$。因为 $d(x_0, x)$ 連續地依賴于 x，所以 T 是 X 在 Ξ 上的一个連續变換。

要使得 X 的子集 A 是 Ξ 的某个子集对于 T 的原像，必須而且只須 A 具有下述性質：A 若包含任一点 x，則 A 同时包含与 x 等价的一切点(換一句話說，必須而且只須 A 是某些等价类的併)。由于每一个 C_n 具有这个性質，而由一切原像集組成的类是一个 σ-环，并且 $C \in \mathbf{S}(\{C_n\})$，因此，存在 Ξ 的子集 Γ 使得 $T^{-1}(\Gamma)=C$。因为 $T(T^{-1}(\Gamma))=\Gamma$，T 是連續变換，而 C 是紧集，所以 Γ 是紧集。由于度量空間的每一个閉子集(因而每一个紧子集)是 G_δ 集，所以存在 Ξ 中开集的叙列 $\{\Delta_n\}$ 使得

$$\Gamma=\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n.$$

令 $U_n=T^{-1}(\Delta_n)$, $n=1,2,\cdots$，則 $C=\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$；由 T 的連續性可知，U_n 是开集，因此 $C \in \mathbf{C}_0$。 ▌

定理 5. 設 X 和 Y 是局部紧豪司道夫空間，$\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0$ 和 $\mathbf{S}_0$ 分別是由 X, Y 和 $X \times Y$ 中全体貝尔集組成的 σ-环，則 $\mathbf{S}_0=\mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}_0$。

証明。設 A 和 B 分別是 X 和 Y 中的紧貝尔集，則 $A \times B$ 是

一个紧 G_δ 集，因而是 $X\times Y$ 中的紧貝尔集。因为 $\mathbf{A}_0\times\mathbf{B}_0$ 是由一切形如 $A\times B$ 的集組成的类产生的 σ-环，所以 $\mathbf{A}_0\times\mathbf{B}_0\subset\mathbf{S}_0$。如果 U 和 V 分别是 X 和 Y 中开的貝尔集，則 $U\times V\in\mathbf{A}_0\times\mathbf{B}_0$。因为由一切形如 $U\times V$ 的集組成的类构成 $X\times Y$ 的一个基，由定理 3 可知，$\mathbf{A}_0\times\mathbf{B}_0\supset\mathbf{S}_0$。 ▌

为了便于参考起見，我們在下面叙述有关波雷耳集类和貝尔集类的生成的一个定理(参看 5.2 和 5.3)；这个定理的証明是很簡单的。

定理 6. 由 $\mathbf{C}$[或 $\mathbf{C}_0$] 中之集的正常差集的一切不相交有限併組成的类是一个环；由这个环产生的 σ-环与 $\mathbf{S}$ [对应地，$\mathbf{S}_0$] 相合。

(1) 如果将数直綫看作局部紧空間，則数直綫上波雷耳集的定义与 §15 中給出的定义等价.

(2) 空間 X 本身是一个波雷耳集，当而且只当它是 σ-紧的.

(3) 由全体有界开集类产生的 σ-环与 $\mathbf{S}$ 相合；或者說，由 $\mathbf{U}$ 产生的 σ-环与 $\mathbf{S}$ 相合. (提示：对于任意紧集 C，設 U 是包含 C 的一个有界开集；考慮 $U-(U-C)$.)

(4) 設 X 是 50.4 中定义的乘积空間，則 X 的貝尔集类与可測集类相合(参看 §38，可測集的定义).

(5) 由全体有界貝尔开集类产生的 σ-环与 $\mathbf{S}_0$ 相合；或者說，由 $\mathbf{U}_0$ 产生的 σ-环与 $\mathbf{S}_0$ 相合. (提示：設 C 是紧集，U 是开集，并且 $C\subset U$，則存在有界貝尔开集 U_0 使得 $C\subset U_0\subset U$.)

(6) "貝尔集"是由"貝尔函数"这个术語而得名的. 設 $\mathscr{B}$ 是具有下述性質的函数类中的最小者：这个类包含一切連續函数，并包含这个类中函数的一切收斂(不一定一致收斂)叙列的極限函数；我們称 $\mathscr{B}$ 里的函数为 X 上的**貝尔函数**. 一个集成为貝尔集的必要和充分条件是：它是一个波雷耳集，并且它的特征函数是貝尔函数.

(7) 設 X 是一个完全不連通的紧豪司道夫空間，則每一个布尔 σ-代数与 X 的全体貝尔集类是同构的(以屬于第一种范疇的貝尔集为模). (提示：

参看 40.15c; 注意到由 X 中全体又开又閉集类产生的 σ-环与全体貝尔集类相合.)

§52. 正則測度

設 μ 是定义在全体波雷耳集类 $\mathbf{S}$ 上的測度, 并且对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C, 有 $\mu(C)<\infty$, 則称 μ 是一个**波雷耳測度**; 設 μ_0 是定义在全体貝尔集类 $\mathbf{S}_0$ 上的測度, 并且对于 $\mathbf{C}_0$ 中每一个 C_0, 有 $\mu_0(C_0)<\infty$, 則称 μ_0 是一个**貝尔測度**.

波雷耳測度和貝尔測度的理論在某些方面是非常相像的, 我們不妨平行地加以討論. 为了这个目的, 我們采用下述記号. 在本节中, 我們以 $\hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{S}}$ 分别表示 $\mathbf{C}, \mathbf{U}, \mathbf{S}$, 同时也分别表示 $\mathbf{C}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{S}_0$; 当我們研究一个測度 $\hat{\mu}$ 的时候, 如果 $\hat{\mathbf{S}}=\mathbf{S}$, 則 $\hat{\mu}$ 表示一个波雷耳測度, 如果 $\hat{\mathbf{S}}=\mathbf{S}_0$, 則 $\hat{\mu}$ 表示一个貝尔測度.

設 $E\in\hat{\mathbf{S}}$, 如果

$$\hat{\mu}(E)=\inf\{\hat{\mu}(U): E\subset U\in\hat{\mathbf{U}}\},$$

則称 E 是(对于測度 $\hat{\mu}$ 的)**外正則集**; 設 $E\in\hat{\mathbf{S}}$, 如果

$$\hat{\mu}(E)=\sup\{\hat{\mu}(C): E\supset C\in\hat{\mathbf{C}}\},$$

則称 E 是 (对于 $\hat{\mu}$ 的) **內正則集**. 設 $E\in\hat{\mathbf{S}}$, 如果 E 既是外正則集又是內正則集, 則称 E 是**正則集**; 如果 $\hat{\mathbf{S}}$ 中每一个集 E 是正則集, 則称測度 $\hat{\mu}$ 是**正則測度**.

不严格地講, 所謂一个測度是正則的, 就是說, 借助于它在紧集和开集 (也就是在拓扑学观点下最重要的集) 上的值, 就可以确定它在任何集上的值. 如果想要使 X 的測度論結构与它的拓扑性質不是毫無关联, 則測度的正則性是一个最为自然的条件, 通过这个条件可以表出二者之間的某些关系. 从測度論的观点看来, 非正則集的性質是極端不規則的.

不难驗証, 当 $E\in\hat{\mathbf{S}}$ 和 $\hat{\mu}(E)=\infty$, 或者当 $E\in\hat{\mathbf{U}}$, 或者当 E 可以表为 $\hat{\mathbf{U}}$ 中測度为有限的集的一个叙列的交集, 在每一种情形下, E

都是外正則集。对偶的命題也成立：当 $E\in\hat{\mathbf{S}}$ 和 $\hat{\mu}(E)=0$，或者当 $E\in\hat{\mathbf{C}}$，或者当 E 可以表为 $\hat{\mathbf{C}}$ 中之集的一个叙列的併集，則 E 是內正則集。我們在下面首先要証明的就是：从某些集的正則性可以推出許許多多其他集的正則性。我們将分段証明这个事实，从紧集到紧集的差，再从差集到差集的併；§51 定理 6 足以說明这种分段証明的方式是十分正确的。然后我們要証明，全体正則集类具有足够的封閉性，因而可以应用关于由环产生的单調类的定理（§6 定理 2）；最后我們可以得到一个結論，說明某些測度必然是正則的。

定理 1. 設 $\hat{\mathbf{C}}$ 中全体集都是外正則集，則 $\hat{\mathbf{C}}$ 中之集的每一个正常差集是外正則集；設 $\mathbf{U}$ 中全体有界集都是內正則集，則 $\mathbf{U}$ 中之集的每一个正常差集是內正則集。

証明。設 C 和 D 是 $\hat{\mathbf{C}}$ 里面的两个集，并且 $C\supset D$。如果 C 是外正則集，則对于每一个 $\varepsilon>0$，存在 $\hat{\mathbf{U}}$ 中的集 U，使得 $C\subset U$ 并且 $\hat{\mu}(U)\leqslant\hat{\mu}(C)+\varepsilon$。因为 $C-D\subset U-D\in\hat{\mathbf{U}}$，由关系式

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(U-D)-\hat{\mu}(C-D)&=\hat{\mu}((U-D)-(C-D))=\\&=\hat{\mu}(U-C)=\hat{\mu}(U)-\hat{\mu}(C)\leqslant\varepsilon\end{aligned}$$

可知，$C-D$ 是外正則集。

現在証明定理中关于內正則性的部分。設 U 是 $\hat{\mathbf{U}}$ 里面的有界集，并且 $C\subset U$。如果有界集 $U-D(\in\hat{\mathbf{U}})$ 是內正則集，則对于每一个 $\varepsilon>0$，存在 $\hat{\mathbf{C}}$ 中的集 E，使得 $E\subset U-D$ 并且 $\hat{\mu}(U-D)\leqslant\hat{\mu}(E)+\varepsilon$。因为 $C-D=C\cap(U-D)\supset C\cap E\in\hat{\mathbf{C}}$，由关系式

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(C-D)-\hat{\mu}(C\cap E)&=\hat{\mu}((C-D)-(C\cap E))=\\&=\hat{\mu}((C-D)-E)\leqslant\\&\leqslant\hat{\mu}((U-D)-E)=\\&=\hat{\mu}(U-D)-\hat{\mu}(E)\leqslant\varepsilon\end{aligned}$$

可知，$C-D$ 是內正則集。 ▌

定理 2. 有限多个具有有限測度的不相交內正則集的併集是

內正則集。

証明。設 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 是具有有限測度的不相交內正則集的有限类，則对于每一个 $\varepsilon>0$ 幷对于每一个 $i=1, \cdots, n$，存在 $\hat{\mathbf{C}}$ 中的集 C_i，使得

$$C_i \subset E_i, \qquad \hat{\mu}(E_i) \leqslant \hat{\mu}(C_i) + \frac{\varepsilon}{n}.$$

令 $C=\bigcup_{i=1}^n C_i, E=\bigcup_{i=1}^n E_i$，則 $E \supset C \in \hat{\mathbf{C}}$；由关系式

$$\hat{\mu}(E)=\sum_{i=1}^n \hat{\mu}(E_i) \leqslant \sum_{i=1}^n \hat{\mu}(C_i)+\varepsilon=\hat{\mu}(C)+\varepsilon$$

可知，E 是內正則集。 ▌

对应的关于外正則測度的定理，証明起来也很容易；但事实上幷没有这个必要，因为下面的定理包括这种情形在內。

定理 3. 外正則集叙列的併集是外正則集；遞增內正則集叙列的併集是內正則集。

証明。設 $\{E_i\}$ 是外正則集的叙列，則对于每一个 $\varepsilon>0$ 以及每一个 $i=1, 2, \cdots$，存在 $\hat{\mathbf{U}}$ 中的集 U_i，使得

$$E_i \subset U_i, \qquad \hat{\mu}(U_i) \leqslant \hat{\mu}(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

令 $U=\bigcup_{i=1}^\infty U_i, E=\bigcup_{i=1}^\infty E_i$。如果 $\hat{\mu}(E)=\infty$，則 E 显然是外正則集；如果 $\hat{\mu}(E)<\infty$，則

$$\hat{\mu}(U)-\hat{\mu}(E)=\hat{\mu}(U-E) \leqslant \hat{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^\infty (U_i-E_i)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^\infty \hat{\mu}(U_i-E_i)=\sum_{i=1}^\infty (\hat{\mu}(U_i)-\hat{\mu}(E_i)) \leqslant \varepsilon.$$

設 $\{E_i\}$ 是內正則集的遞增叙列，幷設 $E=\bigcup_{i=1}^\infty E_i$。我們有

$$\hat{\mu}(E)=\lim_i \hat{\mu}(E_i).$$

我們要証明，对于滿足条件 $c<\hat{\mu}(E)$ 的每一个实数 c，存在 $\hat{\mathbf{C}}$ 中的集 C，使得 $C \subset E$ 幷且 $c<\hat{\mu}(C)$。为了証明这个事实，我們只須选取 i 的一个值使得 $c<\hat{\mu}(E_i)$；然后利用 E_i 的內正則性，选取 $\hat{\mathbf{C}}$ 中

的集 C，使得 $C\subset E_i$ 并且 $c<\hat{\mu}(C)$。 ▌

定理 4. 具有有限測度的內正則集叙列的交集是內正則集；具有有限測度的遞減外正則集叙列的交集是外正則集。

証明。設 $\{E_i\}$ 是具有有限測度的內正則集的叙列，則对于每一个 $\varepsilon>0$ 以及每一个 $i=1,2,\cdots$，存在 $\hat{\mathbf{C}}$ 中的集 C_i，使得

$$C_i\subset E_i, \qquad \hat{\mu}(E_i)\leqslant\hat{\mu}(C_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}.$$

令 $C=\bigcap_{i=1}^{\infty}C_i$。如果 $E=\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i$，則 $E\supset C\in\hat{\mathbf{C}}$，并且

$$\hat{\mu}(E)-\hat{\mu}(C)=\hat{\mu}(E-C)\leqslant\hat{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i-C_i)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\hat{\mu}(E_i-C_i)=\sum_{i=1}^{\infty}(\hat{\mu}(E_i)-\hat{\mu}(C_i))\leqslant\varepsilon.$$

設 $\{E_i\}$ 是具有有限測度的外正則集的遞減叙列，并設 $E=\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i$。我們有

$$\hat{\mu}(E)=\lim_i\hat{\mu}(E_i).$$

我們要証明，对于滿足条件 $c>\hat{\mu}(E)$ 的每一个实数 c，存在 $\hat{\mathbf{U}}$ 中的集 U，使得 $E\subset U$ 并且 $c>\hat{\mu}(U)$。为了証明这个事实，我們只須选取 i 的一个值使得 $c>\hat{\mu}(E_i)$；然后利用 E_i 的外正則性，选取 $\hat{\mathbf{U}}$ 中的集 U，使得 $E_i\subset U$ 并且 $\hat{\mu}(U)<c$。 ▌

上面定理的証明里的类似之处，表現出內正則性和外正則性之間的对偶性質；事实上这种对偶性比上面所表現出来的更为深刻。我們現在証明，这两种正則性在本質上是一样的。

定理 5. $\hat{\mathbf{C}}$ 中一切集是外正則集的必要和充分条件是：$\hat{\mathbf{U}}$ 中一切有界集是內正則集。

証明。假定 $\hat{\mathbf{C}}$ 中所有的集都是外正則集，U 是 $\hat{\mathbf{U}}$ 中的任意有界集，ε 是任意的正数。設 C 是 $\hat{\mathbf{C}}$ 中的集，并且 $U\subset C$；因为 $C-U$ 是紧集并且属于 $\hat{\mathbf{S}}$，所以根据 §51 定理 4 有 $C-U\in\hat{\mathbf{C}}$，因而存在 $\hat{\mathbf{U}}$ 中的集 V，使得

$$C-U\subset V, \qquad \hat{\mu}(V)\leqslant\hat{\mu}(C-U)+\varepsilon.$$

因为 $U = C-(C-U) \supset C-V \in \hat{\mathbf{C}}$，由关系式

$$\hat{\mu}(U)-\hat{\mu}(C-V)=\hat{\mu}(U-(C-V))=\hat{\mu}(U\cap V)\leqslant$$
$$\leqslant\hat{\mu}(V-(C-U))=\hat{\mu}(V)-\hat{\mu}(C-U)\leqslant\varepsilon$$

可知，U 是內正則集。

現在假定 $\hat{\mathbf{U}}$ 中所有的有界集都是內正則集，C 是 $\hat{\mathbf{C}}$ 中任意的集，ε 是任意的正数。設 U 是 $\hat{\mathbf{U}}$ 中的有界集，并且 $C \subset U$；因为 $U-C$ 是有界集并且屬于 $\hat{\mathbf{U}}$，所以存在 $\hat{\mathbf{C}}$ 中的集 D，使得

$$D \subset U-C, \qquad \hat{\mu}(U-C)\leqslant\hat{\mu}(D)+\varepsilon.$$

因为 $C = U-(U-C) \subset U-D \in \hat{\mathbf{U}}$，由关系式

$$\hat{\mu}(U-D)-\hat{\mu}(C)=\hat{\mu}((U-D)-C)=$$
$$=\hat{\mu}((U-C)-D)=\hat{\mu}(U-C)-\hat{\mu}(D)\leqslant\varepsilon$$

可知，C 是外正則集。 ▌

定理 6. 下面两个条件都是 $\hat{\mu}$ 为正則测度的必要和充分条件：1) $\hat{\mathbf{C}}$ 中全体集都是外正則集；2) $\hat{\mathbf{U}}$ 中全体有界集都是內正則集。

証明。两个条件的必要性都是很显然的。要証明条件的充分性，只須（定理 3）証明 $\hat{\mathbf{S}}$ 中每一个有界集是正則集，因为 $\hat{\mathbf{S}}$ 中每一个集可以表为 $\hat{\mathbf{S}}$ 中有界集增叙列的併集。設 E_0 是 $\hat{\mathbf{S}}$ 中的有界集，C_0 是 $\hat{\mathbf{C}}$ 中的集，并且 $E_0 \subset C_0$。根据 §5 定理 5，σ-环 $\hat{\mathbf{S}} \cap C_0$ 是由一切形如 $C \cap C_0$ 的集組成的类产生的，其中 $C \in \hat{\mathbf{C}}$。根据 §51 定理 6（应用在紧空間 C_0 上），这个 σ-环是由一切形如 $E \cap C_0$ 的集組成的环产生的，其中 E 是 $\hat{\mathbf{C}}$ 中之集的正常差集的不相交有限併。根据定理 1, 2 和 3，如果条件 1) 成立，則 σ-环 $\hat{\mathbf{S}} \cap C_0$ 中每一个集是外正則集；如果条件 2) 成立，則 $\hat{\mathbf{S}} \cap C_0$ 中每一个集是內正則集。根据定理 3 和 4，C_0 的外正則子集类和內正則子集类都是单調类；由 §6 定理 2 和本节定理 5 可知，如果条件 1) 和 2) 的任何一个成立，則当 C_0 的子集屬于 $\hat{\mathbf{S}}$ 时，这个子集必然是正則集；特别是，E_0 是正則集。 ▌

定理 7. 貝尔测度 ν 是正則測度；如果 $C \in \mathbf{C}$，則

$$\nu^*(C)=\inf\{\nu(U_0): C\subset U_0\in \mathbf{U}_0\},$$

如果 $U \in \mathbf{U}$，則

$$\nu_*(U)=\sup\{\nu(C_0): U\supset C_0\in \mathbf{C}_0\}.$$

証明. 因为 $\mathbf{C}_0$ 中每一个集可以表为 $\mathbf{U}_0$ 中測度为有限的集的遞減叙列的交集，由定理 6 可知，ν 是正則測度。根据外測度的定义，我們有

$$\nu^*(C)=\inf\{\nu(E_0): C\subset E_0\in \mathbf{S}_0\}\leqslant\inf\{\nu(U_0): C\subset U_0\in \mathbf{U}_0\};$$

对于每一个 $\varepsilon>0$，存在 $\mathbf{S}_0$ 中的集 E_0，使得

$$C\subset E_0, \qquad \nu(E_0)\leqslant\nu^*(C)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 E_0 是外正則集，所以存在 $\mathbf{U}_0$ 中的集 U_0，使得

$$E_0\subset U_0, \qquad \nu(U_0)\leqslant\nu(E_0)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是有

$$C\subset U_0, \qquad \nu(U_0)\leqslant\nu^*(C)+\varepsilon.$$

定理中关于內測度部分也可以按照完全同样的方式証明，只須利用貝尔集 E_0 的內正則性。 ▌

定理 8. 設 μ 是波雷耳測度，ν 是定义在全体貝尔集类上的測度，由等式 $\nu(E)=\mu(E)$ 确定，其中 E 是貝尔集。下面兩个条件都是 μ 为正則測度的必要和充分条件：

对于 $\mathbf{C}$ 中一切 C，$\mu(C)=\nu^*(C)$；

对于 $\mathbf{U}$ 中一切有界开集 U，$\mu(U)=\nu_*(U)$。

如果兩个正則波雷耳測度在一切貝尔集上相等，則它們在一切波雷耳集上相等。

証明. 先証条件的充分性。設 $\mu(C)=\nu^*(C)$，其中 $C\in\mathbf{C}$，則根据定理 7，对于每一个 $\varepsilon>0$，存在 $\mathbf{U}_0$ 中的集 U_0，使得

$$C\subset U_0, \qquad \mu(U_0)=\nu(U_0)\leqslant\nu^*(C)+\varepsilon=\mu(C)+\varepsilon;$$

因此 C 是外正則集，所以 μ 是正則測度。第二个条件的充分性可以按照完全同样的方式証明，只須应用定理 7 的最后一部分。

現在証明条件的必要性。設 μ 是正則測度，ε 是任意正数。对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C，存在 $\mathbf{U}$ 中的有界集 U，使得

$$C \subset U, \qquad \mu(U) \leqslant \mu(C) + \varepsilon;$$

类似地，对于 $\mathbf{U}$ 中每一个有界集 U，存在 $\mathbf{C}$ 中的集 C，使得

$$C \subset U, \qquad \mu(U) \leqslant \mu(C) + \varepsilon.$$

在每一种情形，存在 $\mathbf{C}_0$ 中的 C_0 和 $\mathbf{U}_0$ 中的 U_0，使得 $C \subset U_0 \subset C_0 \subset U$（§50 定理 4）。根据定理 7，我們有

$$\nu^*(C) \leqslant \nu(U_0) = \mu(U_0) \leqslant \mu(U) \leqslant \mu(C) + \varepsilon$$

和

$$\nu_*(U) \geqslant \nu(C_0) = \mu(C_0) \geqslant \mu(C) \geqslant \mu(U) - \varepsilon.$$

因为 ε 是任意的，所以有

$$\nu^*(C) \leqslant \mu(C) \qquad \text{和} \qquad \nu_*(U) \geqslant \mu(U);$$

反方向的两个不等式显然都成立。这就說明了正則測度在紧集上的值可以由它在貝尔集上的值唯一地确定。最后，利用 §51 定理 6，就得到定理中最后一部分結論。 ▌

在結束本节之前，我們再引进一个概念，这个概念有时可以用作証明正則性的工具。設 μ 是任意波雷耳測度，μ_0 是由等式 $\mu_0(E) = \mu(E)$ 确定的貝尔測度，其中 $E \in \mathbf{S}_0$。如果 $\mathbf{C}$ 中每一个集或 $\mathbf{U}$ 中每一个有界集是 μ_0^*-可測集——因而，在每一种情形，$\mathbf{S}$ 中每一个集是 μ_0^*-可測集，——則称波雷耳測度 μ 是**增补正則測度**；也就是說，如果一切紧集，因而一切波雷耳集，屬于 μ_0 的增补的定义域，則 μ 是一个增补正則測度。如果 μ 是增补正則測度，則对于每一个波雷耳集 E，存在貝尔集 A 和 B，使得

$$A \subset E \subset B, \qquad \mu_0(B - A) = 0;$$

根据定理 8，增补正則測度必然是正則測度。

(1) 每一个波雷耳測度是 σ-有限的。

(2) 如果空間 X 是紧的，則全体正則集类是一个正規类(参看 6.2)．

(3) 設 μ 是波雷耳測度，如果存在可列集 Y，使得对于每一个波雷耳集 E 有 $\mu(E)=\mu(E\cap Y)$，則 μ 是正則測度．

(4) 設 X 是歐几里得平面，μ 是定义在全体波雷耳集类上的勒貝格測度，則 μ 是在本节意义下的一个正則波雷耳測度．如果对于每一个波雷耳集 E，定义 $\mu(E)$ 为 E 的一切水平截口的(值綫上的)測度之和，則 μ 不是波雷耳測度．

(5) 設空間 X 是紧的，x^* 是一个点使得 $\{x^*\}$ 不是 G_δ 集(例如 50.3 中所述的)．对于 $\mathbf{S}$ 中每一个集 E，令 $\mu(E)=\chi_E(x^*)$，則 μ 是一个正則波雷耳測度，但不是增补正則測度．

(6) 設 μ_1, μ_2 和 μ 都是波雷耳測度，滿足条件 $\mu=\mu_1+\mu_2$，則只要这三个測度中任意两个是正則的，另外一个必定也是正則的．(提示：如果 $C\in\mathbf{C}$, $U\in\mathbf{U}$, $C\subset U$，并且 $\mu(U)\leqslant\mu(C)+\varepsilon$，則

$$\mu_1(C)+\mu_2(U)\leqslant\mu(U)\leqslant\mu_1(C)+\mu_2(C)+\varepsilon.)$$

(7) 設 X 和 Y 都是紧豪司道夫空間，T 是 X 在 Y 上的連續变換，μ 是 X 上的波雷耳測度．令 $\nu=\mu T^{-1}$，并設 D 是 Y 的紧子集．D 对于 ν 是正則的，必須而且只須，$C=T^{-1}(D)$ 对于 μ 是正則的．(提示：如果 $C\subset U\in\mathbf{U}$，則 $T(X-U)$ 和 D 是 Y 中不相交的紧集．如果 V 是 D 的一个邻域，并且与 $T(X-U)$ 不相交，則 $C\subset T^{-1}(V)\subset U$.)

(8) 設 μ 是正則波雷耳測度，則对于每一个 σ-有界集 E，有

$$\mu^*(E)=\inf\{\mu(U):E\subset U\in\mathbf{U}\} \quad \text{和} \quad \mu_*(E)=\sup\{\mu(C):E\supset C\in\mathbf{C}\}.$$

(9) 設 μ 和 ν 是波雷耳測度，μ 是正則測度，并且 $\nu\ll\mu$，則 ν 也是正則測度．

(10a) 設 Ω 是最小的不可列序数，$\overline{X}$ 是由小于或等于 Ω 的一切序数組成的集．令 $X=\overline{X}-\{\Omega\}$．如果取一切形如 $\{x:\alpha<x\leqslant\beta\}$ 的“区間”与集 $\{0\}$ 組成的类作为 $\overline{X}$ 的一个基，則 $\overline{X}$ 是紧的．

(10b) 由 X 的一切無界閉子集組成的类对于可列交的运算是封閉的．

(10c) 对于 $\overline{X}$ 中每一个波雷耳集 E，按照 E 包含或不包含 X 的無界閉子集而令 $\mu(E)=1$ 或 0，則 μ 是一个波雷耳測度．

(10d) 在 (10c) 中定义的波雷耳測度 μ 不是正則測度．(提示：包含 Ω 的每一个区間具有測度 1.)

§53. 波雷耳測度的生成

本节的目的在于說明，怎样可以从一些比較簡单的集函数得出某些(正則的)波雷耳測度。

設 **C** 是全体紧集类，定义在 **C** 上的非負，有限，单調，并具有可加性及部分可加性的集函数称为容度。換一句話說，容度就是定义在 **C** 上滿足下列条件的集函数 λ：

(a) 对于 **C** 中一切 C, $0\leqslant\lambda(C)<\infty$；

(b) 如果 C 和 D 是紧集，并且 $C\subset D$，則 $\lambda(C)\leqslant\lambda(D)$；

(c) 如果 C 和 D 是不相交的紧集，則 $\lambda(C\cup D)=\lambda(C)+\lambda(D)$；

(d) 如果 C 和 D 是任意两个紧集，則 $\lambda(C\cup D)\leqslant\lambda(C)+\lambda(D)$。

因为 $\lambda(0)+\lambda(0)=\lambda(0\cup 0)=\lambda(0)<\infty$，所以容度在空集上的值必为零。

以下我們要从一个給定的容度 λ 得出定义在全体波雷耳开集类上的一个集函数 λ_*，又从 λ_* 得出定义在全体 σ-有界集类上的一个外測度 μ^*。然后，利用以前已經建立起来的 μ^*-可測性理論，得出一个測度 μ，而这个測度是一个正則波雷耳測度。

設 λ 是一个容度，对于 **U** 中每一个 U，令

$$\lambda_*(U)=\sup\{\lambda(C): U\supset C\in \mathbf{C}\};$$

我們称 λ_* 是由 λ 引出的內容度。

定理 1. 設 λ_* 是由容度 λ 引出的內容度，則 λ_* 在空集上的值为零，并具有单調性，可列部分可加性和可列可加性。

証明。等式 $\lambda_*(0)=0$ 显然成立。設 U 和 V 都屬于 **U**, $U\subset V$，并設 C 是被 U 所包的紧集，則 $C\subset V$，因而 $\lambda(C)\leqslant\lambda_*(V)$。于是有

$$\lambda_*(U)=\sup\lambda(C)\leqslant\lambda_*(V).$$

設 U 和 V 都屬于 **U**, C 是紧集，并且 $C\subset U\cup V$，則根据 §50 定理 1，存在紧集 D 和 E 使得

$$D\subset U,\qquad E\subset V\qquad 并且\qquad C=D\cup E.$$

因为$\lambda(C)\leqslant\lambda(D)+\lambda(E)\leqslant\lambda_*(U)+\lambda_*(V)$，所以

$$\lambda_*(U\cup V)=\sup\lambda(C)\leqslant\lambda_*(U)+\lambda_*(V),$$

也就是說，λ_* 具有部分可加性。利用数学归納法，λ_*具有有限部分可加性。設 $\{U_i\}$ 是 $\mathbf{U}$ 中之集的叙列，C 是紧集，并且 $C\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$，則根据 C 的紧性，存在正整数 n 使得 $C\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$。于是有

$$\lambda(C)\leqslant\lambda_*(\bigcup_{i=1}^{n}U_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_*(U_i)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_*(U_i),$$

从而有

$$\lambda_*(\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i)=\sup\lambda(C)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_*(U_i),$$

也就是說，λ_*具有可列部分可加性。

現在設 U 和 V 是 $\mathbf{U}$ 中不相交的两个集，C 和 D 是紧集，并且 $C\subset U$，$D\subset V$。因为 C 和 D 不相交，而且 $C\cup D\subset U\cup V$，所以有

$$\lambda(C)+\lambda(D)=\lambda(C\cup D)\leqslant\lambda_*(U\cup V),$$

从而有

$$\lambda_*(U)+\lambda_*(V)=\sup\lambda(C)+\sup\lambda(D)\leqslant\lambda_*(U\cup V).$$

由 λ_* 的部分可加性推出，λ_* 具有可加性；利用数学归納法，λ_* 具有有限可加性。設 $\{U_i\}$ 是 $\mathbf{U}$ 中不相交集的叙列，則

$$\lambda_*(\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i)\geqslant\lambda_*(\bigcup_{i=1}^{n}U_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_*(U_i).$$

上式对于每一个 $n=1,2,\cdots$都成立，因此

$$\lambda_*(\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i)\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_*(U_i).$$

由 λ_* 的可列部分可加性推出，λ_* 具有可列可加性。 ▎

設 λ_* 是由容度 λ 引出的内容度，在由全体 σ-有界集組成的可傳 σ-环上定义集函数 μ^* 如下：

$$\mu^*(E)=\inf\{\lambda_*(U):E\subset U\in\mathbf{U}\}.$$

我們称 μ^* 为由 λ 引出的外測度；下面的定理足以說明，我們采用

这个术語是很合理的。

定理 2. 由容度 λ 引出的外测度 μ^* 是一个外測度.

証明。因为 $0\subset 0\in \mathbf{U}$ 并且 $\lambda_*(0)=0$, 所以 $\mu^*(0)=0$。設 E 和 F 是两个 σ-有界集, 并且 $E\subset F$。如果 U 是 $\mathbf{U}$ 中的集, 并且 $F\subset U$, 則 $E\subset U$, 因而 $\mu^*(E)\leqslant\lambda_*(U)$。于是有

$$\mu^*(E)\leqslant\inf\lambda_*(U)=\mu^*(F).$$

設 $\{E_i\}$ 是 σ-有界集的叙列, 則对于每一个 $\varepsilon>0$ 以及每一个 $i=1,2,\cdots$, 存在 $\mathbf{U}$ 中的集 U_i 使得

$$E_i\subset U_i,\qquad \lambda_*(U_i)\leqslant\mu^*(E_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}.$$

于是有

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)\leqslant\lambda_*(\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_*(U_i)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)+\varepsilon;$$

由于 ε 是任意的, 所以 μ^* 具有可列部分可加性。 ▌

我們可能会想到, 集函数 λ_* 也許恰好就是 λ 的扩張, 而 μ^* 恰好就是 λ_* 的扩張; 例如, 我們要問, 对于任何紧集 C, μ^* 是否能使 $\mu^*(C)=\lambda(C)$? 一般說来这是不正确的; 下面的定理就这个問題給出了精确的解答.

定理 3. 設 λ_* 是由容度 λ 引出的內容度, μ^* 是由 λ 引出的外測度, 則对于 $\mathbf{U}$ 中每一个 U, $\mu^*(U)=\lambda_*(U)$, 而对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C, $\mu^*(C^0)\leqslant\lambda(C)\leqslant\mu^*(C)$。

(我們記得, C^0 表示集 C 的內部。)

証明。設 $U\in\mathbf{U}$, 則由关系式 $U\subset U\in\mathbf{U}$ 可知, $\mu^*(U)\leqslant\lambda_*(U)$。設 $V\in\mathbf{U}$, 并且 $U\subset V$, 則 $\lambda_*(U)\leqslant\lambda_*(V)$, 因而

$$\lambda_*(U)\leqslant\inf\lambda_*(V)=\mu^*(U).$$

設 $C\in\mathbf{C}$, $U\in\mathbf{U}$, 并且 $C\subset U$, 則 $\lambda(C)\leqslant\lambda_*(U)$, 因而

$$\lambda(C)\leqslant\inf\lambda_*(U)=\mu^*(C).$$

設 $C\in\mathbf{C}$, $D\in\mathbf{C}$, 并且 $D\subset C^0(\subset C)$, 則 $\lambda(D)\leqslant\lambda(C)$, 因而

$$\mu^*(C^0)=\lambda_*(C^0)=\sup\lambda(D)\leqslant\lambda(C).\ \blacksquare$$

定理 4. 設μ^*是由容度λ引出的外測度，則σ-有界集E为μ^*-可測集的必要和充分条件是：对于$\mathbf{U}$中每一个U，

$$\mu^*(U)\geqslant\mu^*(U\cap E)+\mu^*(U\cap E').$$

証明。設λ_*是由λ引出的內容度，A是任意σ-有界集，U是$\mathbf{U}$中的集，并且$A\subset U$。由关系式

$$\lambda_*(U)=\mu^*(U)\geqslant\mu^*(U\cap E)+\mu^*(U\cap E')\geqslant$$
$$\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E')$$

可知，

$$\mu^*(A)=\inf\lambda_*(U)\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E');$$

反方向的不等式可由μ^*的部分可加性推出，条件的必要性則可由μ^*-可測集的定义推出。$\blacksquare$

定理 5. 設μ^*是由容度λ引出的外測度。对于每一个波雷耳集E，令$\mu(E)=\mu^*(E)$，則集函数μ是一个正則波雷耳測度。

我們称μ是由容度λ引出的波雷耳測度。

証明。首先我們要証明，每一个紧集C(因而每一个波雷耳集)是μ^*-可測的；然后就可以直接推出，μ是定义在全体波雷耳集类上的一个測度。借助于定理 4，我們只須証明，对于$\mathbf{U}$中一切U，有

$$\mu^*(U)\geqslant\mu^*(U\cap C)+\mu^*(U\cap C').$$

設D是$U\cap C'$的紧子集，E是$U\cap D'$的紧子集；我們注意到，集$U\cap C'$和$U\cap D'$都属于$\mathbf{U}$。因为$D\cap E=0$，并且$D\cup E\subset U$，所以有

$$\mu^*(U)=\lambda_*(U)\geqslant\lambda(D\cup E)=\lambda(D)+\lambda(E),$$

其中λ_*是由λ引出的內容度。于是有

$$\mu^*(U)\geqslant\lambda(D)+\sup\lambda(E)=\lambda(D)+\lambda_*(U\cap D')=$$
$$=\lambda(D)+\mu^*(U\cap D')\geqslant\lambda(D)+\mu^*(U\cap C),$$

从而有

$$\mu^*(U) \geqslant \mu^*(U \cap C) + \sup \lambda(D) =$$
$$= \mu^*(U \cap C) + \lambda_*(U \cap C') = \mu^*(U \cap C) + \mu^*(U \cap C').$$

現在証明 $\mu(C) < \infty$。設 F 是一个紧集，滿足条件 $C \subset F^0$，則有

$$\mu(C) = \mu^*(C) \leqslant \mu^*(F^0) \leqslant \lambda(F) < \infty.$$

最后，由关系式

$$\mu(C) = \mu^*(C) = \inf\{\lambda_*(U) : C \subset U \in \mathbf{U}\} =$$
$$= \inf\{\mu^*(U) : C \subset U \in \mathbf{U}\} = \inf\{\mu(U) : C \subset U \in \mathbf{U}\}$$

可知，測度 μ 是正則的。 ▌

最后，我們再引进一个定理，这个定理我們以后还要引用。

定理 6. 設 T 是 X 在 X 上的一个同胚，λ 是一个容度。对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C，令 $\hat{\lambda}(C) = \lambda(T(C))$。如果 μ 和 $\hat{\mu}$ 分别是由 λ 和 $\hat{\lambda}$ 引出的波雷耳测度，則对于每一个波雷耳集 E，有 $\hat{\mu}(E) = \mu(T(E))$。特别是，如果 λ 对于 T 是不变的，則 μ 对于 T 也是不变的。

証明. 如果 λ_* 和 $\hat{\lambda}_*$ 分别是由 λ 和 $\hat{\lambda}$ 引出的內容度，$U \in \mathbf{U}$，則由关系式

$$\{\hat{\lambda}(C) : U \supset C \in \mathbf{C}\} = \{\lambda(T(C)) : U \supset C \in \mathbf{C}\} =$$
$$= \{\lambda(D) : D = T(C),\ U \supset C \in \mathbf{C}\} =$$
$$= \{\lambda(D) : U \supset T^{-1}(D) \in \mathbf{C}\} =$$
$$= \{\lambda(D) : T(U) \supset D \in \mathbf{C}\}$$

可知，$\hat{\lambda}_*(U) = \lambda_*(T(U))$。如果 μ^* 和 $\hat{\mu}^*$ 分别是由 λ 和 $\hat{\lambda}$ 引出的外測度，則类似的关系式可以說明，对于每一个 σ-有界集 E，有 $\hat{\mu}^*(E) = \mu^*(T(E))$；因此，对于每一个波雷耳集 E，有 $\hat{\mu}(E) = \mu(T(E))$。定理的最后一部分可由前面部分立即推出。 ▌

(1) 下面的例子都是定义在局部緊豪斯道夫空間的全体緊子集类 $\mathbf{C}$ 上的非負，有限集函数；在这些例子里，有的是容度，而其余的則恰好不滿足容度定义里的条件（单調性，可加性和部分可加性）之一。

(1a) X 是一个無限的离散空間，X^* 是由 X 补上一个点而得到的緊空

間；对于 X^* 中每一个紧集 C，按照 C 为有限或無限而令 $\lambda(C)=0$ 或 1.

(1b) X 是由有限多个点組成的离散空間；对于每一个紧集 C，令 $\lambda(C)=1$.

(1c) X 是閉区間 $[-1,+1]$；按照 $0\in C^0$ 或 $0\in' C^0$ 而令 $\lambda(C)=1$ 或 0.

(1d) $X^*=\{X,x^*\}$ 是(1a)中所述的紧空間；按照 $x^*\in C$ 或 $x^*\in' C$ 而令 $\lambda(C)=1$ 或 0.

(1e) $X=\{0,\pm\frac{1}{n}:n=1,2,\cdots\}$. 如果 C 包含無限多个負数，令 $\lambda(C)=0$；在其他的場合，按照 $0\in C$ 或 $0\in' C$ 而令 $\lambda(C)=1$ 或 0.

(1f) 設 μ_0 是 X 上的貝尔测度；对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C，令

$$\lambda(C)=\sup\{\mu_0(C_0):C\supset C_0\in \mathbf{C}_0\}.$$

(1g) 設 μ 是 X 上的波雷耳测度；对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C，令 $\lambda(C)=\mu(C^0)$.

(2) 設 λ 和 $\hat{\lambda}$ 是两个容度，μ^* 和 $\hat{\mu}^*$ 分别是由 λ 和 $\hat{\lambda}$ 引出的外测度；如果对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C，有 $\lambda(C)\leqslant\hat{\lambda}(C)\leqslant\hat{\mu}^*(C)$，則 $\mu^*=\hat{\mu}^*$.（提示：借助于定理 3 的第一部分，我們只須証明，对于 $\mathbf{U}$ 中每一个 U，$\mu^*(U)=\sup\{\hat{\lambda}(C):U\supset C\in\mathbf{C}\}$.）

(3) 下面是定理 3 的逆定理，这个結果比(2)中的为强．設 λ 和 $\hat{\lambda}$ 是两个容度，μ^* 和 $\hat{\mu}^*$ 分别是由 λ 和 $\hat{\lambda}$ 引出的外测度；如果对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C，有 $\mu^*(C^0)\leqslant\hat{\lambda}(C)\leqslant\mu^*(C)$，則 $\mu^*=\hat{\mu}^*$.（提示：根据定理 5，对于 $\mathbf{U}$ 中每一个 U，有

$$\mu^*(U)=\sup\{\mu^*(C):U\supset C\in\mathbf{C}\}.$$

我們要証明的是：

$$\mu^*(U)=\sup\{\hat{\lambda}(C):U\supset C\in\mathbf{C}\}.$$

如果 $\varepsilon>0$，并且 $U\in\mathbf{U}$，則存在 $\mathbf{C}$ 中的集 C 使得 $C\subset U$ 和 $\mu^*(U)\leqslant\mu^*(C)+\varepsilon$，并存在 $\mathbf{C}$ 中的集 D 使得 $C\subset D^0\subset D\subset U$.）

(4) 設 λ 是一个容度，具有下列性質：当 $C^0\neq 0$ 时，$\lambda(C)>0$. 如果 μ 是由 λ 引出的波雷耳测度，則对于 $\mathbf{U}$ 中每一个非空的 U，有 $\mu(U)>0$.

(5) 不依賴于任何容度，我們可以考慮具有下列性質的，定义在全体 σ-有界集类上的外测度 μ^*：对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C，

$$\mu^*(C)=\inf\{\mu^*(U):C\subset U\in\mathbf{U}\}<\infty.$$

对于这种外测度来説，定理 4 和 5 是否成立？

§54. 正則容度

前面我們已經提到，一个容度的值可能不等于由这个容度引出的波雷耳測度的值(当然指的是在紧集上)。但是对于有一类很重要的容度来說，§53 中所述的过程确实构成了容度的扩張。我們要在本节中研究这一类容度，并利用得到的結果导出一个很重要的定理；这个定理肯定了在某种場合下波雷耳測度的存在性，至于唯一性則已經包含在 §52 定理 8 里面。

設 λ 是一个容度，如果对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C，有

$$\lambda(C)=\inf\{\lambda(D):C\subset D^0\subset D\in\mathbf{C}\},$$

則称 λ 是**正則的**。考慮到容度只在紧集上有定义，我們尽可能地使容度的正則性定义与測度的(外)正則性定义相仿。

定理 1. 設 μ 是由正則容度 λ 引出的波雷耳測度，則对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C，$\mu(C)=\lambda(C)$。

証明。設 $C\in\mathbf{C}$；因为 λ 是正則的，所以，对于每一个 $\varepsilon>0$，存在 $\mathbf{C}$ 中的集 D，使得

$$C\subset D^0,\qquad \lambda(D)\leqslant\lambda(C)+\varepsilon.$$

根据 §53 定理 3，我們有

$$\lambda(C)\leqslant\mu(C)\leqslant\mu(D^0)\leqslant\lambda(D)\leqslant\lambda(C)+\varepsilon;$$

由于 ε 是任意的，于是得到定理的結論。▌

下面是定理 1 的逆定理。

定理 2. 設 μ 是正則波雷耳測度。如果对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C，令 $\lambda(C)=\mu(C)$，則集函数 λ 是一个正則容度，并且由 λ 引出的波雷耳測度与 μ 相合。

証明。集函数 λ 显然是一个容度。根据 μ 的正則性，对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C 并对于每一个 $\varepsilon>0$，存在 $\mathbf{U}$ 中的集 U，使得

$$C\subset U,\qquad \mu(U)\leqslant\mu(C)+\varepsilon.$$

如果 $D\in\mathbf{C}$，并且 $C\subset D^0\subset D\subset U$，則

$$\lambda(D)=\mu(D)\leqslant\mu(U)\leqslant\mu(C)+\varepsilon=\lambda(C)+\varepsilon;$$

这就說明了 λ 是正則的。設 $\hat{\mu}$ 是由 λ 引出的波雷耳測度，則根据定理 1，对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C，有 $\hat{\mu}(C)=\lambda(C)=\mu(C)$；因此 $\hat{\mu}=\mu$。 ▌

定理 3. 設 μ_0 是貝尔測度。如果对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C，令

$$\lambda(C)=\inf\{\mu_0(U_0): C\subset U_0\in\mathbf{U}_0\},$$

則 λ 是一个正則容度。

証明。不难驗証，λ 是非負的，有限的，并且是单調的。

設 C 和 D 是 $\mathbf{C}$ 中的集，U_0 和 V_0 是 $\mathbf{U}_0$ 中的集，并且 $C\subset U_0$，$D\subset V_0$；于是 $C\cup D\subset U_0\cup V_0\in\mathbf{U}_0$，因而

$$\lambda(C\cup D)\leqslant\mu_0(U_0\cup V_0)\leqslant\mu_0(U_0)+\mu_0(V_0).$$

由此得到

$$\lambda(C\cup D)\leqslant\inf\mu_0(U_0)+\inf\mu_0(V_0)=\lambda(C)+\lambda(D),$$

也就是說，λ 具有部分可加性。

設 C 和 D 是 $\mathbf{C}$ 中不相交的集，則在 $\mathbf{U}_0$ 中存在不相交的集 U_0 和 V_0，使得 $C\subset U_0, D\subset V_0$。如果 $C\cup D\subset W_0\in\mathbf{U}_0$，則有

$$\lambda(C)+\lambda(D)\leqslant\mu_0(U_0\cap W_0)+\mu_0(V_0\cap W_0)\leqslant\mu_0(W_0),$$

从而有

$$\lambda(C)+\lambda(D)\leqslant\inf\mu_0(W_0)=\lambda(C\cup D).$$

利用前面得到的关于 λ 的部分可加性，就說明了 λ 具有可加性。

現在証明 λ 是正則的，設 C 是任意紧集，ε 是任意正数。按照 λ 的定义，存在 $\mathbf{U}_0$ 中的集 U_0，使得

$$C\subset U_0, \qquad \mu_0(U_0)\leqslant\lambda(C)+\varepsilon.$$

如果 D 是紧集，并且 $C\subset D^0\subset D\subset U_0$，則

$$\lambda(D)\leqslant\mu_0(U_0)\leqslant\lambda(C)+\varepsilon. \quad ▌$$

定理 4. 設 μ_0 是貝尔測度，則存在滿足下列条件的唯一的一个正則波雷耳測度 μ：对于每一个貝尔集 E，$\mu(E)=\mu_0(E)$。

証明。对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C，令

$$\lambda(C)=\inf\{\mu_0(U_0): C\subset U_0\in\mathbf{U}_0\},$$

則根据定理3, λ 是一个正則容度; 設 μ 是由 λ 引出的正則波雷耳測度. 根据定理1, 对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C, 有 $\mu(C)=\lambda(C)$. 因为每一个貝尔測度是正則的(参看 §52 定理7), 所以 $\lambda(C)=\mu_0(C)$; 于是, 对于 $\mathbf{C}_0$ 中每一个 C, 我們有 $\mu(C)=\mu_0(C)$. 这就証明了 μ 的存在性; μ 的唯一性見 §52 定理8. ┃

(1) 在 53.1 里給出的集函数, 其中哪几个是正則容度?

(2) 沿用 §53 定理6 中的記号, 如果 λ 是正則容度, 則 $\hat{\lambda}$ 也是正則容度.

(3) 設 μ 是波雷耳測度; 对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C, 令

$$\lambda(C)=\sup\{\mu(C_0): C\supset C_0\in\mathbf{C}_0\}.$$

μ 为增补正則測度的必要和充分条件是: λ 是正則容度(参看 53.1f).

(4) 設 λ 是一个容度, 如果对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C, 有

$$\lambda(C)=\sup\{\lambda(D): C^0\supset D\in\mathbf{C}\},$$

則称 λ 是**內正則的**. 下述与定理1和定理2相类似的定理成立.

(4a) 設 μ 是由內正則容度 λ 引出的波雷耳測度, 則对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C, $\mu(C^0)=\lambda(C)$.

(4b) 設 μ 是正則波雷耳測度. 如果对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C, 令 $\lambda(C)=\mu(C^0)$, 則集函数 λ 是一个內正則容度, 并且由 λ 引出的波雷耳測度与 μ 相合.

§55. 某些連續函数类

和前面一样, 設 X 是局部紧豪司道夫空間. 我們以 $\mathscr{L}(X)$ 或 $\mathscr{L}$ 表示由定义在 X 上具有下述性質的一切实値連續函数 f 組成的类: f 在一个紧集以外恒等于零. 換一句話說, $\mathscr{L}$ 就是定义在 X 上能使

$$N(f)=\{x: f(x)\neq 0\}$$

为有界集的一切实値連續函数 f 的类. 如果 X 不是紧空間, 而 X^* 是由 X 补上一个点 x^* 而得到的紧空間, 則常称 x^* 为**無穷远点**; 因此, $\mathscr{L}$ 就是定义在 X 上并在無穷远点的某邻域內恒等于零的实値連續函数类. 以記号 $\mathscr{L}_+(X)$ 或 $\mathscr{L}_+$ 表示由 $\mathscr{L}$ 中一切非負函数

組成的子类。下面是我們关于这种函数空間的第一条定理；在我們以前的許多問題里已經隐含着这个結果。

定理 1. 設 C 是任意紧貝尔集，則存在 $\mathscr{L}_+$ 中函数的遞減叙列 $\{f_n\}$，使得对于 X 中每一个 x，

$$\lim_n f_n(x) = \chi_C(x).$$

証明. 設 $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$，其中 U_n 是有界开集；于是，对于每一个正整数 n，在 $\mathscr{F}$（参看 §50）中存在函数 g_n 使得

$$g_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in C, \\ 0, & \text{若 } x \in' U_n. \end{cases}$$

令 $f_n = g_1 \cap \cdots \cap g_n$，則 $\{f_n\}$ 是非負連續函数的遞減叙列，并且对于 X 中每一个 x，有

$$\lim_n f_n(x) = \chi_C(x).$$

因为 U_n 是有界的，所以 $f_n \in \mathscr{L}_+$，$n = 1, 2, \cdots$. ▌

設 μ_0 是貝尔測度，$f \in \mathscr{L}$，$\{x: f(x) \neq 0\} \subset C \in \mathbf{C}_0$. 因为 $\mu_0(C) < \infty$，而 f 是有界的貝尔可测函数（参看 §51 定理 2），所以 f 对于 μ_0 是可积的，并且

$$\int f d\mu_0 = \int_C f d\mu_0.$$

特別是，如果 μ 是波雷耳測度，μ_0 是由等式 $\mu_0(E) = \mu(E)$ 确定的貝尔測度，其中 E 是貝尔集，則在这种情形下上述命題也成立。

定理 2. 設 μ 是貝尔测度，它在一切非空的貝尔开集上取正値，并設 $f \in \mathscr{L}_+$；則 $\int f d\mu = 0$ 的必要和充分条件是：对于 X 中每一个 x，$f(x) = 0$.

証明. 条件显然是充分的. 現在証明条件的必要性. 設 $\int f d\mu = 0$，U 是一个有界的貝尔开集，并且 $\{x: f(x) \neq 0\} \subset U$. 令 $E = \{x: f(x) = 0\}$；因为

$$0 = \int f d\mu \geq \int_{U-E} f d\mu,$$

而f是非負的，所以$\mu(U-E)=0$。由于$U-E$是一个貝尔开集，因此$U-E=0$，也就是$U\subset E$。 ▌

定理 3. 設μ_0是貝尔测度，$\varepsilon>0$，則对应于每一个可积簡单貝尔函数f，存在可积簡单函数g，

$$g=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{C_i},$$

使得C_i是紧貝尔集，$i=1,\cdots,n$，并且

$$\int|f-g|\,d\mu_0\leqslant\varepsilon.$$

証明．設$f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}$；并設$c$是一个正数，满足下述条件：对于$X$中一切$x$，$|f(x)|\leqslant c$（也就是，对于$i=1,\cdots,n$，$|\alpha_i|\leqslant c$）。因为$\mu_0$是正則的，所以，对于每一个$i=1,\cdots,n$，存在紧貝尔集$C_i$，使得

$$C_i\subset E_i,\qquad \mu_0(E_i)\leqslant\mu_0(C_i)+\frac{\varepsilon}{nc}.$$

如果$g=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{C_i}$，則

$$\int|f-g|\,d\mu_0=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\,\mu_0(E_i-C_i)\leqslant\varepsilon. \quad ▌$$

定理 4. 設μ_0是貝尔测度，$\varepsilon>0$；如果$g=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{C_i}$是一个簡单函数，其中$C_i$是紧貝尔集，則在$\mathscr{L}$中存在函数$h$，使得

$$\int|g-h|\,d\mu_0\leqslant\varepsilon.$$

証明．因为$\{C_1,\cdots,C_n\}$是不相交紧集的有限类，所以存在不相交有界貝尔开集的有限类$\{U_1,\cdots,U_n\}$，使得$C_i\subset U_i$，$i=1,\cdots,n$。由于μ_0是正則的，不丧失普遍性我們可以假定

$$\mu_0(U_i) \leqslant \mu_0(C_i) + \frac{\varepsilon}{nc}, \qquad i=1, \cdots, n,$$

其中 c 是滿足下述条件的正数：对于 X 中一切 x，$|g(x)| \leqslant c$。对于每一个 $i=1, \cdots, n$，在 $\mathscr{F}$ 中存在函数 h_i，滿足下列条件，当 $x \in C_i$ 时 $h_i(x)=1$，当 $x \in X-U_i$ 时 $h_i(x)=0$；我們令 $h=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i$。因为 $h_i \in \mathscr{L}_+, i=1, \cdots, n$，所以 $h \in \mathscr{L}$；又因为 U_i 是不相交的，所以对于 X 中一切 x，我們有 $|h(x)| \leqslant c$。于是

$$\int |g-h| d\mu_0 = \sum_{i=1}^{n} \int_{U_i - C_i} |h| d\mu_0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} c\mu_0(U_i - C_i) \leqslant \varepsilon. \quad \blacksquare$$

(1) 設 μ 是正則波雷耳測度，則由緊集的特征函数的一切有限綫性組合組成的类在 $\mathscr{L}_p(\mu)$ 中稠密，$1 \leqslant p < \infty$。

(2) 設 μ 是正則波雷耳測度，則 $\mathscr{L}$ 在 $\mathscr{L}_p(\mu)$ 中稠密，$1 \leqslant p < \infty$。

(3) 設 μ 是正則波雷耳測度，E 是測度为有限的波雷耳集，f 是定义在 E 上的波雷耳可測函数，則对于每一个 $\varepsilon > 0$，在 E 中存在緊集 C，使得 $\mu(E-C) \leqslant \varepsilon$，并使得 f 在 C 上連續.（提示：如果 f 是簡单函数，可以按照証明定理 3 的方法来証明这个命题．在一般的場合，存在收斂到 f 的簡单函数列 $\{f_n\}$；根据叶果洛夫定理和 μ 的正則性，在 E 中存在緊集 C_0，使得 $\mu(E) \leqslant \mu(C_0) + \frac{\varepsilon}{2}$，并使得 $\{f_n\}$ 在 C_0 上一致收斂到 f．設 C_n 是 E 的緊子集，使得 $\mu(E) \leqslant \mu(C_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$，并使得 f_n 在 C_n 上連續；于是，集

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

滿足命题中所述的条件.）这个結果称为**卢辛定理**.

§56. 綫性汎函数

設 Λ 是定义在 $\mathscr{L}$ 上的实值函数，如果对于 $\mathscr{L}$ 中任意一对函数 f 和 g 以及任意一对实数 α 和 β，有

$$\Lambda(\alpha f + \beta g) = \alpha \Lambda(f) + \beta \Lambda(g),$$

則称 Λ 是 $\mathscr{L}$ 上的**綫性汎函数**。設 Λ 是 $\mathscr{L}$ 上的綫性汎函数，如果对于 $\mathscr{L}_+$ 中每一个 f，有 $\Lambda(f) \geqslant 0$，則称 Λ **是正的**。我們注意到，正

的綫性汎函数 Λ 具有单調性，也就是說，如果 $f\in\mathscr{L}$，$g\in\mathscr{L}$，并且 $f\geqslant g$，則 $\Lambda(f)\geqslant\Lambda(g)$。不难驗証，如果 μ_0 是貝尔測度，而 $\Lambda(f)=\int f d\mu_0$，其中 $f\in\mathscr{L}$，則 Λ 是正的綫性汎函数；本节的主要目的在于証明，任何正的綫性汎函数都可以按照这种方式表示出来。

我們将采用下面的記号；这种記号虽然不常見，但却很能表出它的含义。設 E 是 X 的子集，f 是定义在 X 上的实値函数，如果对于 X 中每一个 x，有 $\chi_E(x)\leqslant f(x)$ [或 $\chi_E(x)\geqslant f(x)$]，則記为 $E\subset f$[对应地，$E\supset f$]。

定理 1. 設 Λ 是 $\mathscr{L}$ 上正的綫性汎函数。对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C，令

$$\lambda(C)=\inf\{\Lambda(f):C\subset f\in\mathscr{L}_+\},$$

則 λ 是一个正則容度。如果 μ 是由 λ 引出的波雷耳測度，則对于每一个有界开集 U 并对于 $\mathscr{L}_+$ 中滿足条件 $U\subset f$ 的每一个 f，有

$$\mu(U)\leqslant\Lambda(f).$$

証明。因为 Λ 是正的，所以当 $C\in\mathbf{C}$ 时有 $\lambda(C)\geqslant 0$。要証明 λ 是有限的，設 C 是任意紧集，U 是包含 C 的任意有界开集。因为在 $\mathscr{L}_+$ 中存在滿足下列条件的函数 f：当 $x\in C$ 时 $f(x)=1$，当 $x\in X-U$ 时 $f(x)=0$，所以 $C\subset f\in\mathscr{L}_+$，从而有

$$\lambda(C)\leqslant\Lambda(f)<\infty.$$

設 C 和 D 是紧集，$C\supset D$，并且 $C\subset f\in\mathscr{L}_+$，則 $D\subset f$，因此 $\lambda(D)\leqslant\Lambda(f)$。于是有 $\lambda(D)\leqslant\inf\Lambda(f)=\lambda(C)$，也就是說，$\lambda$ 具有单調性。

設 C 和 D 是紧集，并且 $C\subset f\in\mathscr{L}_+$，$D\subset g\in\mathscr{L}_+$，則

$$C\cup D\subset f+g\in\mathscr{L}_+,$$

因此 $\lambda(C\cup D)\leqslant\Lambda(f+g)=\Lambda(f)+\Lambda(g)$。于是有

$$\lambda(C\cup D)\leqslant\inf\Lambda(f)+\inf\Lambda(g)=\lambda(C)+\lambda(D),$$

也就是說，λ 具有部分可加性。

設 C 和 D 是不相交的紧集，則存在不相交的有界开集 U 和

V, 使得 $C\subset U$, $D\subset V$. 設 f 和 g 是 $\mathscr{L}_+$ 中滿足下列条件的两个函数: 当 $x\in C$ 时 $f(x)=1$, 当 $x\in X-U$ 时 $f(x)=0$, 当 $x\in D$ 时 $g(x)=1$, 当 $x\in X-V$ 时 $g(x)=0$. 如果 $C\cup D\subset h\in\mathscr{L}_+$, 則

$$\lambda(C)+\lambda(D)\leqslant\Lambda(hf)+\Lambda(hg)=\Lambda(h(f+g))\leqslant\Lambda(h).$$

于是有

$$\lambda(C)+\lambda(D)\leqslant\inf\Lambda(h)=\lambda(C\cup D);$$

利用 λ 的部分可加性, 立即推出 λ 具有可加性.

我們已經証明了 λ 是一个容度; 剩下需要証明的是 λ 的正則性. 对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C 以及每一个 $\varepsilon>0$, 在 $\mathscr{L}_+$ 中存在函数 f, 使得

$$C\subset f, \qquad \Lambda(f)\leqslant\lambda(C)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

如果 γ 是滿足条件 $0<\gamma<1$ 的实数, 而 $D=\{x:f(x)\geqslant\gamma\}$, 則

$$C\subset\{x:f(x)\geqslant1\}\subset\{x:f(x)>\gamma\}\subset D^0\subset D\in\mathbf{C}.$$

因为 $D\subset\frac{1}{\gamma}f\in\mathscr{L}_+$, 所以

$$\lambda(D)\leqslant\frac{1}{\gamma}\Lambda(f)\leqslant\frac{1}{\gamma}\left(\lambda(C)+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

我們可以选擇 γ 使它滿足关系式

$$\frac{1}{\gamma}\left(\lambda(C)+\frac{\varepsilon}{2}\right)\leqslant\lambda(C)+\varepsilon,$$

于是有 $\lambda(D)\leqslant\lambda(C)+\varepsilon$; 由于 ε 是任意的, 这就說明了 λ 是正則的.

定理中最后一部分結論可由 μ 的正則性推出. 事实上, 如果 C 是紧集, 并且 $C\subset U$, 則 $C\subset f$, 因此

$$\mu(C)=\lambda(C)\leqslant\Lambda(f);$$

于是有 $\mu(U)=\sup\mu(C)\leqslant\Lambda(f)$. ▌

定理 2. 設 Λ 是 $\mathscr{L}$ 上正的綫性泛函数, 对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C, 令

$$\lambda(C)=\inf\{\Lambda(f):C\subset f\in\mathscr{L}_+\}.$$

如果 μ 是由容度 λ 引出的波雷耳测度，則对于 $\mathscr{L}_+$ 中每一个 f，有

$$\int f d\mu \leqslant \Lambda(f).$$

証明。因为 $\int f d\mu$ 和 $\Lambda(f)$ 都是綫性地依賴于 f，所以只須就滿足下列条件的函数 f 証明这个不等式：对于 X 中每一个 x，$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$。

設 n 是一个固定的正整数；对于 $i=1, \cdots, n$，令

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(x) < \dfrac{i-1}{n}, \\ \dfrac{f(x) - \dfrac{i-1}{n}}{\dfrac{1}{n}} = nf(x) - (i-1), & \text{若 } \dfrac{i-1}{n} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{i}{n}, \\ 1, & \text{若 } \dfrac{i}{n} < f(x). \end{cases}$$

因为

$$f_i = ([nf-(i-1)] \cup 0) \cap 1 = ([nf-(i-1)] \cap 1) \cup 0,$$

$i=1, \cdots, n$，所以函数 f_i 都屬于 $\mathscr{L}_+$。在滿足关系式

$$\frac{j-1}{n} \leqslant f(x) \leqslant \frac{j}{n}$$

的任何 x 处，我們有

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } 1 \leqslant i \leqslant j-1, \\ 0, & \text{若 } j+1 \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

因此，对于 X 中每一个 x，有 $f(x) = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$。

令 $U_i = \left\{x : f(x) > \dfrac{i}{n}\right\}$，$i=0, 1, \cdots, n$，則 U_i 是有界开集，而对于 $i=1, \cdots, n$，有 $U_i \subset f_i$，根据定理 1，又有 $\mu(U_i) \leqslant \Lambda(f_i)$。因为 $U_0 \supset U_1 \supset \cdots \supset U_n = 0$，我們有

$$\Lambda(f)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Lambda(f_i)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu(U_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)\mu(U_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n}[\mu(U_i)-\mu(U_{i+1})]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i+1}{n}\mu(U_i-U_{i+1})-\frac{1}{n}\mu(U_1)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{n-1}\int_{U_i-U_{i+1}}fd\mu-\frac{1}{n}\mu(U_1)=$$

$$=\int_{U_1}fd\mu-\frac{1}{n}\mu(U_1)\geqslant\int fd\mu-\frac{1}{n}\mu(U_0).$$

由于 n 是任意的，而 $\mu(U_0)<\infty$，于是得到定理的結論。▌

定理 3. 設 Λ 是 $\mathscr{L}$ 上正的綫性汎函数，对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C，令

$$\lambda(C)=\inf\{\Lambda(f): C\subset f\in\mathscr{L}_+\}.$$

如果 μ 是由容度 λ 引出的波雷耳測度，則对于每一个紧集 C 以及每一个正数 ε，在 $\mathscr{L}_+$ 中存在函数 f_0，使得 $C\subset f_0$，并且

$$\Lambda(f_0)\leqslant\int f_0 d\mu+\varepsilon.$$

証明. 設 f_0 是 $\mathscr{L}_+$ 中的函数，滿足下列条件：

$$C\subset f_0,\qquad \Lambda(f_0)\leqslant\lambda(C)+\varepsilon;$$

于是有

$$\Lambda(f_0)\leqslant\mu(C)+\varepsilon\leqslant\int f_0 d\mu+\varepsilon.\quad ▌$$

定理 4. 設 Λ 是 $\mathscr{L}$ 上正的綫性汎函数，則存在滿足下列条件的波雷耳測度 μ：对于 $\mathscr{L}$ 中每一个 f，

$$\Lambda(f)=\int fd\mu.$$

証明。对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C, 令 $\lambda(C)=\inf\{\Lambda(f):C\subset f\in\mathscr{L}_+\}$, 幷設 μ 是由容度 λ 引出的波雷耳測度, f 是 $\mathscr{L}$ 中一个固定的函数。

設 C 是滿足条件 $\{x:f(x)\neq 0\}\subset C$ 的紧集, ε 是一个正数。根据定理 3, 在 $\mathscr{L}_+$ 中存在函数 f_0, 使得

$$C\subset f_0,\qquad \Lambda(f_0)\leqslant\int f_0\,d\mu+\varepsilon.$$

設 c 是滿足下述条件的正数: 对于 X 中一切 x, $|f(x)|\leqslant c$; 于是, 函数 $f+cf_0$ 屬于 $\mathscr{L}_+$, 而根据定理 2, 就有

$$\Lambda(f)+c\Lambda(f_0)=\Lambda(f+cf_0)\geqslant\int(f+cf_0)d\mu=$$

$$=\int fd\mu+c\int f_0\,d\mu.$$

因此

$$\Lambda(f)\geqslant\int f\,d\mu+c\left[\int f_0\,d\mu-\Lambda(f_0)\right]\geqslant\int f\,d\mu-c\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的, 所以

$$\Lambda(f)\geqslant\int fd\mu,$$

换一句話說, 定理 2 对于 $\mathscr{L}$ 中一切 f 都成立。对函数 $-f$ 应用这个不等式, 我們得到反方向的不等式。▌

定理 5. 設 μ 是正則波雷耳測度; 令

$$\Lambda(f)=\int fd\mu,$$

其中 $f\in\mathscr{L}$; 幷令

$$\lambda(C)=\inf\{\Lambda(f):C\subset f\in\mathscr{L}_+\},$$

其中 $C\in\mathbf{C}$。于是, 对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C, 有 $\mu(C)=\lambda(C)$。由此可見, 将正的綫性汎函数表为对于正則波雷耳測度的积分, 其表示方式是唯一的。

証明。显然, $\mu(C)\leqslant\lambda(C)$。如果 $C\in\mathbf{C}$ 而 $\varepsilon>0$, 則因为 μ 是正則的, 所以必定存在包含 C 的有界开集 U, 使得

$$\mu(U) \leqslant \mu(C) + \varepsilon.$$

設 f 是 $\mathscr{P}$ 中滿足下列条件的函数：当 $x \in C$ 时 $f(x)=1$，当 $x \in X-U$ 时 $f(x)=0$；于是 $C \subset f \in \mathscr{L}_+$，并且

$$\lambda(C) \leqslant \Lambda(f) = \int f d\mu \leqslant \mu(U) \leqslant \mu(C) + \varepsilon.$$

由于 ε 是任意的，定理于是証明完畢. ▌

(1) 設 $x_0 \in X$. 对于 $\mathscr{L}$ 中每一个 f，令 $\Lambda(f)=f(x_0)$，对于每一个波雷耳集 E，令 $\mu(E)=\chi_E(x_0)$，则 $\Lambda(f)=\int f d\mu$.

(2) 設 μ_0 是貝尔測度. 对于 $\mathscr{L}$ 中每一个 f，令 $\Lambda(f)=\int f d\mu_0$，并設 μ 是滿足条件 $\Lambda(f)=\int f d\mu$ 的波雷耳測度，則对于每一个貝尔集 E，有 $\mu(E) = \mu_0(E)$.

(3) 設 μ_0 是貝尔測度. 对于 $\mathscr{L}$ 中每一个 f，令 $\Lambda(f)=\int f d\mu_0$. 对于 $\mathbf{U}$ 中每一个 U，令

$$\lambda_*(U) = \sup\{\Lambda(f) : U \supset f \in \mathscr{L}_+\},$$

而对于每一个 σ-有界集 E，令

$$\mu^*(E) = \inf\{\lambda_*(U) : E \subset U \in \mathbf{U}\};$$

則对于每一个貝尔集 E，有 $\mu^*(E) = \mu_0(E)$.

(4) 在由全体正整数組成的可列离散空間中补上一个点 ∞，我們得到緊空間 X. 在这种場合下，$\mathscr{L}$ 中的函数 f 就是滿足条件 $f(\infty)=\lim_n f(n)$ 的收斂实数列 $\{f(n)\}$；最一般的正綫性泛函数 Λ 具有下列形式：

$$\Lambda(f) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant \infty} f(n) \Lambda_n,$$

其中 $\sum_n \Lambda_n$ 是收斂的正数項級数.

(5) 設 Λ 是 $\mathscr{L}$ 上的綫性泛函数，如果存在滿足下述条件的常数 k：对于 $\mathscr{L}$ 中每一个 f，有 $|\Lambda(f)| \leqslant k \sup\{|f(x)| : x \in X\}$，則称 Λ 是**有界的**. 每一个有界(不一定是正的)綫性泛函数可以表为两个有界的正綫性泛函数之差. 要証明这个命題，可以摹仿广义測度的若当分解的导出过程.

(6) 如果 X 是緊空間，則 $\mathscr{L}$ 上每一个正的綫性泛函数是有界的.

第十一章

哈尔测度

§57. 开 子 群

在开始闡述拓扑群中的测度理論以前，我們要在本节內引进三条拓扑方面的定理，这些定理在測度論里有很重要的用处。設 Z 是拓扑群 X 的子群，如果 Z 本身是一个开的子集，則称 Z 是 X 的**开子群**。我們要証明，拓扑群 X 的开子群 Z 拥有 X 的全部拓扑性質——出乎 Z 的范圍以外的性質，則可以通过 Z 的左陪集类的結构而表达出来，这个左陪集类的拓扑結构是离散的。我們还要証明，每一个局部紧拓扑群必有充分小的开子群——换一句話說，必有这样的开子群：在这些开子群里，測度在無穷远点处的不規則現象不可能發生。

定理 1. 拓扑群 X 的子群 Z 是开子群的必要和充分条件是：Z 具有非空的內部 Z^0。

証明。条件显然是必要的。現在証明条件的充分性。因为 $Z^0 \neq 0$，所以在 Z^0 中存在元素 z_0。設 z 是 Z 的任意元素，則 $zz_0^{-1} \in Z$，因而 $zz_0^{-1}Z = Z$。于是 $zz_0^{-1}Z^0 = Z^0$，从而

$$z = (zz_0^{-1})z_0 \in Z^0.$$

由于 z 是 Z 中任意的元素，因此 $Z \subset Z^0$，换一句話說，Z 是一个开集。▎

定理 2. 設 Z 是拓扑群 X 的开子群，則任意多个 Z 的左陪集的併集在 X 中既是开集又是閉集。

証明。因为任意多个左陪集之併的余集，其本身还是一个同样类型的併集，而以开集为余集的集必为閉集，所以只須証明，任意多个左陪集之併是一个开集。又因为开集的併集必为开集，所以只須証明，Z 的每一个左陪集是开集；但是我們已經知道 Z 是一个开集，定理于是証明完畢。 ▌

定理 3. 設 E 是局部紧拓扑群 X 中的任意波雷耳集，則存在 X 的 σ-紧开子群 Z，使得 $E\subset Z$。

証明。只須証明(参看 §51 定理 1)，如果$\{C_n\}$是 X 中紧集的叙列，則存在 X 的 σ-紧开子群 Z，使得 $C_n\subset Z, n=1,2,\cdots$。

設 D 是紧集，包含单位元素 e 的某个邻域。令 $D_0=D$，并令

$$D_{n+1}=D_n^{-1}D_n\cup C_{n+1}, \qquad n=0,1,2,\cdots.$$

如果 $Z=\bigcup_{n=0}^{\infty}D_n$，則 Z 是 σ-紧集，具有非空的內部，并包含一切 C_n。如果我們能导出关系式 $Z^{-1}Z\subset Z$，則定理的証明就完成了。

首先我們証明：如果 $e\in D_n, n=0,1,2,\cdots$，則 $D_n\subset D_{n+1}$。事实上，如果 $e\in D_n$，則 $e\in D_n^{-1}$；由此可見，如果 $x\in D_n$，則

$$x\in(D_n^{-1})x\subset D_n^{-1}D_n\subset D_{n+1}.$$

因为 $e\in D_0$，所以 $D_n\subset D_{n+1}, n=0,1,2,\cdots$。

現在設 x 和 y 是 z 的两个元素。由上段的結論可知，x 和 y 二者同属于某一个 D_n，因此

$$x^{-1}y\in D_n^{-1}D_n\subset D_{n+1}\subset Z. \quad ▌$$

§58. 哈尔测度的存在性

設局部紧拓扑群 X 里的波雷耳测度 μ 具有下列性質：对于每一个非空波雷耳开集 $U, \mu(U)>0$，对于每一个波雷耳集 $E, \mu(xE)=\mu(E)$；我們称 μ 是一个**哈尔测度**。本节的目的在于証明，在每一个局部紧拓扑群里至少有一个哈尔测度存在。

哈尔测度定义里的第二个条件可以称为左不变性（或者称为在左轉移下的不变性）。定义里第一个条件与 μ 不恒为零这个条

件是等价的．事实上，如果$\mu(U)=0$，其中U是某个非空的波雷耳开集，又設C是任意紧集，则类$\{xU:x\in C\}$是C的开复盖．因为C是紧集，所以存在C的有限子集$\{x_1, \cdots, x_n\}$，使得$C\subset\bigcup_{i=1}^n x_iU$，而由$\mu$的左不变性导出

$$\mu(C)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mu(x_iU)=n\mu(U)=0.$$

如果μ在全体紧集类$\mathbf{C}$上等于零，则μ在全体波雷耳集类$\mathbf{S}$上也等于零；于是我們得到下述結論：哈尔测度就是不恒等于零的左不变的波雷耳测度．

在开始討論哈尔测度的构成以前，我們还要指出，哈尔测度的定义里有着不对称的地方．左轉移和右轉移在群里占有完全对称的地位；因此，在我們的定义里只提出左不变性似乎是不很公平的．我們所定义的概念事实上应該称为"左哈尔测度"；同时我們还应該引进一个类似的"右哈尔测度"概念，并且应該对二者之間的关系加以詳尽的研究．实际上我們在以后有时就要引用这种更为精确的术語．但是在絕大多数的場合，特别是在有关哈尔测度的存在性問題里，由于左、右哈尔测度的完全对称性，我們只須采用不对称的处理方式．事实上，因为将X中每一个x映为x^{-1}的变换能使一切拓扑和群論的性質保持不变，并且能使一切"左"和"右"的性質相互轉化，所以从每一个"左定理"可以导出和它对应的"右定理"，反之亦然．特别是，不难驗証，如果μ是一个左哈尔测度，对于每一个波雷耳集E，令$\nu(E)=\mu(E^{-1})$，则集函数ν是一个右哈尔测度；反之，如果μ是一个右哈尔测度，则ν是一个左哈尔测度．

設E是任意有界集，F是具有非空內部的任意集；我們定义"比"$E:F$为滿足下述条件的最小非負整数n：E能被n个F的左轉移所遮盖，换一句話說，存在X中n个元素組成的集$\{x_1, \cdots, x_n\}$，使得$E\subset\bigcup_{i=1}^n x_iF$．容易看出，因为$E$是有界集，而$F^0\neq 0$，所

以 $E:F$ 必为有限数；此外，如果 A 是具有非空內部的有界集，则

$$E:F \leqslant (E:A)(A:F).$$

哈尔測度的建立，以下述的想法为其基础。上一章的結果告訴我們，要想在局部紧豪司道夫空間里建立一个波雷耳測度，只須首先建立一个容度 λ，也就是定义在 $\mathbf{C}$ 上具有某种可加性的一个集函数。設 C 是一个紧集，U 是一个非空的开集，则比 $C:U$ 可以用来表示 C 和 U 二者的大小之間的比較。将 $C:U$ 乘以取决于 U 的大小的一个适当的因子，然后对所得的乘积按照某种意义取極限，假定 U 無限地縮小，则所得的極限值应該就是 λ 在 C 上的值。

上面的說法并不完全准确。为了揭露这个不准确之点，并使得我們的考慮方式更富于直观性起見，我們現在举出一个例子。設 X 是欧几里得平面，μ 是勒貝格測度，C 是任意紧集。設 U_r 是半徑为 r 的一个圓的內部；如果对于每一个 $r>0$，令 $n(r)=C:U_r$，则显然有 $n(r)\pi r^2 \geqslant \mu(C)$。我們知道，$\lim\limits_{r\to 0} n(r)\pi r^2$ 存在，但它不等于 $\mu(C)$ 而等于 $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\mu(C)$。換一句話說，从一个在 U_r 上取值为 πr^2 的通常的測度出發，按照上述的考慮方式我們得到一个新的測度，这个測度是原来的測度与一个常数因子的乘积。为了消去这个比例因子，我們将以两个比的比值 $(C:U)/(A:U)$ 来代替 $C:U$，其中 A 是具有非空內部的一个固定的紧集。

定理 1. 設 U 是一个固定的非空开集，A 是具有非空內部的一个固定的紧集。对于每一个紧集 C，令

$$\lambda_U(C) = \frac{C:U}{A:U},$$

则集函数 λ_U 是非負的，有限的，单調的，具有左不变性和部分可加性；此外，λ_U 并具有下述狹义的可加性：如果 C 和 D 是紧集，并且 $CU^{-1} \cap DU^{-1} = 0$，则

$$\lambda_U(C \cup D) = \lambda_U(C) + \lambda_U(D).$$

証明。除了最后一部分以外，定理的其余部分都可以利用关

于 $C:U$ 的定义直接驗証．現在証明定理的最后一部分．設 xU 是 U 的一个左轉移；容易看出，如果 $C\cap xU\neq 0$，則有 $x\in CU^{-1}$，如果 $D\cap xU\neq 0$，則有 $x\in DU^{-1}$．由此可見，U 的任何左轉移都不能够与 C 和 D 同时有非空的交集．所以 λ_U 具有定理中所述的狹义可加性．▌

定理 2.　在每一个局部紧拓扑群 X 中，至少有一个正則哈尔测度存在。

証明．考慮到 §53 定理 5 和 6，我們只須建立一个不恒等于零并且具有左不变性的容度；然后由 §53 定理 3 可知，由这个容度引出的测度不恒等于零，因而是一个正則哈尔测度．

設 A 是具有非空內部的一个固定的紧集，并設 $\mathbf{N}$ 是由单位元素的一切邻域組成的类．对于 $\mathbf{N}$ 中每一个 U，我們在全体紧集 $\mathbf{C}$ 的类上定义集函数 λ_U 如下：

$$\lambda_U(C)=\frac{C:U}{A:U}.$$

因为 $C:U\leqslant(C:A)(A:U)$，所以，对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C，

$$0\leqslant\lambda_U(C)\leqslant C:A.$$

根据定理 1．每一个 λ_U 与一个容度的差別之点只在于它不一定具有可加性．我們要应用康脫对角綫法的近代形式，也就是齐霍諾夫关于乘积空間的紧性的定理，来确定出 λ_U 的一个極限，这个極限具有容度的全部性質，包含可加性在內。

对于 $\mathbf{C}$ 中每一个集 C，我們以閉区間 $[0, C:A]$ 与之对应，并以 Φ 表示全体这种区間的笛卡兒乘积空間（在拓扑学的意义下）．于是，Φ 是一个紧豪司道夫空間，Φ 中的点就是定义在 $\mathbf{C}$ 上的实值函数 ϕ，并且对于 $\mathbf{C}$ 中每一个 C，$0\leqslant\phi(C)\leqslant C:A$．对于 $\mathbf{N}$ 中每一个 U，函数 λ_U 就是这个空間里的一个点．

对于 $\mathbf{N}$ 中每一个 U，我們以記号 $\Lambda(U)$ 表示由一切能使 $V\subset U$ 的函数 λ_V 組成的集，即

$$A(U)=\{\lambda_V: U\supset V\in \mathbf{N}\}.$$

如果$\{U_1, \cdots, U_n\}$是由单位元素的邻域組成的任意有限类，也就是$\mathbf{N}$的任意有限子类，則$\bigcap_{i=1}^n U_i$也是单位元素的一个邻域，并且

$$\bigcap_{i=1}^n U_i\subset U_j,\ j=1, \cdots, n.$$

我們有

$$A(\bigcap_{i=1}^n U_i)\subset \bigcap_{i=1}^n A(U_i),$$

而由于每一个$A(U)$ 包含λ_U，因而是非空的，所以由一切形如$A(U)$的集組成的类，其中$U\in\mathbf{N}$，具有有限交的性質。由Φ的紧性可知，在一切$A(U)$的閉包的交集里存在一个点λ：

$$\lambda\in\bigcap\{\overline{A(U)}: U\in\mathbf{N}\}.$$

我們要証明，λ就是我們所求的容度。

对于$\mathbf{C}$中每一个C，显然有$0\leqslant\lambda(C)\leqslant C:A<\infty$。現在我們証明，$\lambda$具有单調性；我們注意到，对于$\mathbf{C}$中每一个固定的$C$，由等式$\xi_C(\phi)=\phi(C)$确定的函数$\xi_C$是定义在$\Phi$上的連續函数，因此，对于任意两个紧集$C$和$D$，集

$$\Delta=\{\phi:\phi(C)\leqslant\phi(D)\}\subset\Phi$$

是一个閉集。如果$C\subset D$，并且$U\in\mathbf{N}$，則$\lambda_U\in\Delta$，从而有$A(U)\subset\Delta$。因为Δ是閉集，所以$\lambda\in\overline{A(U)}\subset\Delta$；于是，$\lambda$具有单調性。

关于λ的部分可加性，可以按照完全相同的方式得到証明；我們略去这一部分的証明，轉而証明λ具有可加性。設C和D是滿足条件$C\cap D=0$的紧集，則存在e的邻域U，使得$CU^{-1}\cap DU^{-1}=0$。如果$V\in\mathbf{N}$，并且$V\subset U$，則$CV^{-1}\cap DV^{-1}=0$，因而（定理1）

$$\lambda_V(C\cup D)=\lambda_V(C)+\lambda_V(D).$$

这就是說，当$V\subset U$时，λ_V屬于閉集

$$\Delta=\{\phi:\phi(C\cup D)=\phi(C)+\phi(D)\},$$

因此$A(U)\subset\Delta$。由此可見，$\lambda\in\overline{A(U)}\subset\Delta$，換一句話說，$\lambda$具有可加性。

再应用一次同样的論点就可以証明$\lambda(A)=1$（因为对于$\mathbf{N}$中

每一个 U 有 $\lambda_U(A)=1$)；这就說明了集函数 λ (我們已經知道，它是一个容度)不恒等于零．最后，因为每一个 λ_U 具有左不变性，所以 λ 具有左不变性．∎

(1) 如果我們引进与群 X 相对偶的群 $\hat{X}$，就可以由左哈尔测度的存在性导出右哈尔测度的存在性．按照定义，群 $\hat{X}$ 具有与 X 相同的元素和拓扑結构；$\hat{X}$ 中两个元素 x 和 y 的乘积(即 xy)則規定为 X 中 y 和 x 的乘积 (即 yx)．

(2) 哈尔测度显然不是唯一的，因为，如果 μ 是一个哈尔测度而 c 是任意的正数，則 $c\mu$ 也是一个哈尔测度．

(3) 对于 $\mathbf{N}$ 中每一个 U，設 λ_U 是定理 1 中所定义的集函数，則对于滿足条件 $C^0\neq 0$ 的每一个紧集 C，

$$0<\frac{1}{A:C}\leqslant\lambda_U(C).$$

由此可見，当 $C^0\neq 0$ 时，$\lambda(C)>0$．

(4) 下面是一个著名的群的例子，在这个群里左、右哈尔测度有本質上的区别．設 X 是由一切形如

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的矩陣組成的集，其中 $0<x<\infty$，$-\infty<y<+\infty$；容易驗証，对于通常的矩陣乘法，X 构成一个群．如果按照明显的方式将 X 拓扑化，也就是将 X 看作欧几里得平面的一个子集(半平面)，則 X 是一个局部紧拓扑群．对于 X 中每一个波雷耳集 E，令

$$\mu(E)=\iint_E\frac{1}{x^2}dxdy,\quad \nu(E)=\iint_E\frac{1}{x}dxdy$$

(式中对于半平面里的勒貝格测度取积分)，則 μ 和 ν 分别是 X 中的左和右哈尔测度．因为 $\mu(E^{-1})=\nu(E)$，所以这个例子說明，可以存在可测集 E，使得 $\mu(E)<\infty$ 而 $\mu(E^{-1})=\infty$．

(5) 設 C 和 D 是两个紧集；如果 $\mu(C)=\mu(D)=0$，則是否一定有 $\mu(CD)=0$?

(6) 設 μ 是 X 里的哈尔测度，則 X 为离散的必要和充分条件是：至少对于 X 中一个点 x，有 $\mu(\{x\})\neq 0$．

(7) 每一个局部紧拓扑群 X 满足 31.10 中所述的条件(参看§57).

(8) 設 X 里的哈尔測度 μ 是有限測度,则 X 是紧群.

(9) 設 μ 是 X 里的哈尔測度,则下面四个条件是互相等价的: (a)X 是 σ-紧群; (b)μ 是全 σ-有限的; (c) 任何不相交的非空波雷耳开集类是可列的; (d)对于每一个非空波雷耳开集 U,存在 X 中元素的叙列$\{x_n\}$,使得

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}x_nU.$$

§59. 可 測 群

按照定义,拓扑群就是一个群 X,它具有满足某种可分公理的拓扑結构,并且将 (x,y) 变为 $x^{-1}y$ ($X\times X$ 在 X 上) 的变换是連續的. 为了我們应用方便起見, 我們要以另外一个定义来代替它. 这个新的定义要求:由等式 $S(x,y)=(x, xy)$ 确定的 ($X\times X$ 在它本身上的)变换 S 是一个同胚. 两个定义是等价的. 事实上,如果 X 是在原来的定义下的拓扑群,则 S 是連續的;又因为 S 显然是一个一一变换,并且 $S^{-1}(x,y)=(x,x^{-1}y)$,所以 S^{-1} 也是連續的,因而 S 是一个同胚. 反之,如果已知 S 是一个同胚,则 S^{-1} 是連續的,因而由 S^{-1} 随之以 $X\times X$ 在 X 上的射影所成的变换也是連續的.(在 X 是数直綫并以加法作为群的运算法则的場合, 变换 S 的几何意义很容易想象:它使平面上每一个点(x,y)沿着垂直方向移动一个綫段,这个綫段的量等于 x.)

有了上面的討論, 再加上我們已經知道在每一个局部紧拓扑群里有一个哈尔測度存在, 我們現在引进下述与拓扑群相类似的測度論方面的概念. 設 σ-有限測度空間$(X,\mathbf{S},\mu)$具有下列性質:

(a) μ 不恒等于零,

(b) X 是一个群,

(c) σ-环 $\mathbf{S}$ 和測度 μ 对于左轉移都是不变的,

(d) 由等式 $S(x,y)=(x, xy)$确定的, $X\times X$ 在它本身上的变换 S 是保測性变换,

则称$(X,\mathbf{S},\mu)$是一个可测群。($\mathbf{S}$对于左轉移的不变性是指，对于X中每一个x以及$\mathbf{S}$中每一个E，$xE\in\mathbf{S}$；和通常一样，$X\times X$的可测子集是指σ-环$\mathbf{S}\times\mathbf{S}$中的集。)

設X是局部紧群，$\mathbf{S}$是X中全体貝尔集类，μ是一个哈尔测度。因为S是一个同胚(因而保持貝尔可测性)，并且$X\times X$中全体貝尔集类与$\mathbf{S}\times\mathbf{S}$重合(参看§51定理5)，所以$(X,\mathbf{S},\mu)$是一个可测群。我們在下面对于可测群的討論，其目的在于説明，只从测度論的观点来研究局部紧拓扑群，可以得到怎样的結論。

設X是任意可测空間(特别是，若X是任意可测群)，則由等式$R(x,y)=(y,x)$确定的，$X\times X$在它本身上的一一变換R是保测性变換——要証明这个事实，只須注意到下述極容易驗証的事实：如果E是可测矩形，則$R(E)$和$R^{-1}(E)(=R(E))$都是可测矩形。因为保测性变換的乘积仍是保测性变換，所以上述事实給出了在一个可测群里的大量保测性变換——S和R的一切乘冪的乘积。除了变換S以外，我們还时常要用到它的"反射"$T=R^{-1}SR$；我們有$T(x,y)=(yx,y)$。

在本节中我們假定：

μ和ν(可能但不一定相等)是使得$(X,\mathbf{S},\mu)$和$(X,\mathbf{S},\nu)$为可测群的两个测度，R,S和T是前面描述过的保测性变換。

定理 1. 設E是$X\times X$的任意子集，則对于X中任意的x和y，有

$$(S(E))_x=xE_x \qquad \text{和} \qquad (T(E))^y=yE^y.$$

証明。因为下列等式成立：

$$\chi_{S(E)}(x,y)=\chi_E(x,x^{-1}y),$$

并且$y\in(S(E))_x$必須而且只須$\chi_{S(E)}(x,y)=1$，$x^{-1}y\in E_x$必須而且只須$\chi_E(x,x^{-1}y)=1$，由此即得定理中关于S的結論。关于T的結論可以按照类似的方式証明。 ▎

定理 2. 变換S和T都是从测度空間$(X\times X,\mathbf{S}\times\mathbf{S},\mu\times\nu)$到

它本身上的保測变换。

証明。設 E 是 $X\times X$ 的可測子集，則由富比尼定理和本节定理 1，

$$(\mu\times\nu)(S(E))=\int\nu((S(E))_x)\,d\mu(x)=\int\nu(xE_x)\,d\mu(x)=$$

$$=\int\nu(E_x)\,d\mu(x)=(\mu\times\nu)(E);$$

于是，S 保持測度不变。考虑截口 $(T(E))^y$，按照类似的方式就可以得到定理中关于 T 的結論。 ▌

定理 3. 設 $Q=S^{-1}RS$，則

$$(Q(A\times B))_{x^{-1}}=xA\cap B^{-1},$$

并且

$$(Q(A\times B))^{y^{-1}}=\begin{cases}Ay, & \text{若 } y\in B,\\ 0, & \text{若 } y\in' B.\end{cases}$$

証明。我們注意到，$Q(x,y)=(xy,y^{-1})$，并且 $Q^{-1}=Q$。因为下列等式成立：

$$\chi_{Q(A\times B)}(x^{-1},y)=\chi_{A\times B}(x^{-1}y,y^{-1})=\chi_{xA}(x)\chi_B(y^{-1}),$$

并且 $y\in(Q(A\times B))_{x^{-1}}$ 必須而且只須 $\chi_{Q(A\times B)}(x^{-1},y)=1$，$y\in xA\cap B^{-1}$ 必須而且只須 $\chi_{xA}(y)\chi_B(y^{-1})=1$，由此即得定理中第一个結論。又因为下列等式成立：

$$\chi_{Q(A\times B)}(x,y^{-1})=\chi_{A\times B}(xy^{-1},y)=\chi_{Ay}(x)\chi_B(y),$$

并且 $x\in(Q(A\times B))^{y^{-1}}$ 必須而且只須 $\chi_{Q(A\times B)}(x,y^{-1})=1$，$x\in Ay$ 和 $y\in B$ 必須而且只須 $\chi_{Ay}(x)\chi_B(y)=1$，由此即得定理中第二个結論。 ▌

定理 4. 設 A 是 X 的可測子集[具有正的測度]，并且 $y\in X$，則 Ay 是可測集[具有正的測度]，A^{-1} 也是可測集[具有正的測度]。如果 f 是可測函数，A 是具有正測度的可測集，对于 X 中每一个 x，令 $g(x)=f(x^{-1})/\mu(Ax)$，則 g 是可測函数。

証明。設 B 是包含 y 的任意可測集，則根据定理 3，Ay 是可測集 $Q(A\times B)$（其中 $Q=S^{-1}RS$）的一个截口，因此 Ay 是可測集。要証明定理的其余部分，我們利用下述事实：Q 是 $(X\times X,\ \mathbf{S}\times\mathbf{S},\ \mu\times\mu)$ 在它本身上的保測变換。于是，若 $\mu(A)>0$，則根据定理 3，有

$$0<(\mu(A))^2=(\mu\times\mu)(Q(A\times A))=\int\mu(x^{-1}A\cap A^{-1})d\mu(x),$$

因而对于 x 的至少一个值，$x^{-1}A\cap A^{-1}$ 是一个具有正測度的可測集。換一句話說，我們已經証明，如果 A 是具有正測度的可測集，則必存在具有正測度的可測集 B 使得 $B\subset A^{-1}$。（由此可見，特別是，如果我們能够証明 A^{-1} 是可測集，就立刻可以得到 $\mu(A^{-1})>0$。）因为当 $B\subset A^{-1}$ 时有 $y^{-1}B\subset y^{-1}A^{-1}$，此外，等式 $\mu(y^{-1}B)=\mu(B)$ 成立，所以再应用一次剛才得到的結果就可以說明，必定存在具有正測度的可測集 C 使得 $C\subset(y^{-1}B)^{-1}\subset(y^{-1}A^{-1})^{-1}=Ay$。这就証明了定理中关于 Ay 的全部結論。現在証明 A^{-1} 的可測性。我們注意到，如果 $\mu(A)>0$，則根据定理 3 和剛才得到的結果，我們有

$$\{y:\mu((Q(A\times A))^y)>0\}=A^{-1}.$$

这就証明了当 $\mu(A)>0$ 时 A^{-1} 是可測的；如果 $\mu(A)=0$，我們可以选取一个具有正測度并且与 A 不相交的可測集 B，然后由等式 $A^{-1}=(A\cup B)^{-1}-B^{-1}$ 导出 A^{-1} 的可測性。

由上面得出的結果可知，如果 f 是可測函数，并且 $\hat{f}(x)=f(x^{-1})$，則 $\hat{f}$ 也是可測函数。設 A 和 B 是可測集，$f_0(y)=\mu((Q(A\times B))^y)$，并且 $\hat{f_0}(y)=f_0(y^{-1})$，則函数 f_0 和 $\hat{f_0}$ 都是可測的，根据定理 3 就有

$$\hat{f_0}(y)=\mu(Ay)\chi_B(y).$$

換一句話說，我們已經証明，如果 $h(y)=\mu(Ay)$，則函数 h 在每一个可測集上是可測的，因而 $\frac{1}{h}$ 也具有同样的性質。 ▌

定理 5. 設 A 和 B 是具有正測度的可測集，則存在具有正測

度的可測集 C_1 和 C_2 以及元素 x_1, y_1, x_2 和 y_2，使得

$$x_1C_1\subset A, \quad y_1C_1\subset B, \quad C_2x_2\subset A, \quad C_2y_2\subset B.$$

証明。如果 $\mu(B)>0$，則 $\mu(B^{-1})>0$，因而

$$(\mu\times\mu)(A\times B^{-1})=\mu(A)\mu(B^{-1})>0.$$

由定理 3 可知，对于 X 中每一个 x，集 $x^{-1}A\cap B$ 是可测的，而对于 X 中至少一个 x，这个集具有正的测度。設 x_1 能使 $\mu(x_1^{-1}A\cap B)>0$，并設 $y_1=e$，則若令 $C_1=x_1^{-1}A\cap B$，就有 $x_1C_1\subset A$ 以及 $y_1C_1\subset B$。

对集 A^{-1} 和 B^{-1} 应用这个結果，我們可以找到集 C_0 和点 x_0，y_0，使得 $x_0C_0\subset A^{-1}$ 和 $y_0C_0\subset B^{-1}$；然后我們可以令 $C_2=C_0^{-1}$，$x_2=x_0^{-1}$，$y_2=y_0^{-1}$。 ▌

定理 6. 設 A 和 B 是可测集，并設 $f(x)=\mu(x^{-1}A\cap B)$，則 f 是可测函数，并且

$$\int f\,d\mu=\mu(A)\mu(B^{-1}).$$

如果 $g(x)=\mu(xA\Delta B)$，并且 $\varepsilon<\mu(A)+\mu(B)$，則集 $\{x:g(x)<\varepsilon\}$ 是可测的。

定理的前半部有时称为**平均定理**。

証明。定理的前半部可以由下述命題导出：如果 $Q=S^{-1}RS$，則 Q 是 $(X\times X, \mathbf{S}\times\mathbf{S}, \mu\times\mu)$ 在它本身上的一个保測变換，并且

$$f(x)=\mu((Q(A\times B^{-1}))_x).$$

如果 $\hat{f}(x)=f(x^{-1})$，則 $\hat{f}$ 是可測函数。利用这个結果以及下列等式：

$$\{x:g(x)<\varepsilon\}=\{x:\hat{f}(x)>\frac{1}{2}(\mu(A)+\mu(B)-\varepsilon)\},$$

就得到定理后半部的結論。 ▌

(1) 两个可測群的笛卡兒乘积是不是可測群？

(2) 設 X 是一个緊群，它的势大于連續統的势，μ 是 X 上的哈尔測度，

则$(X, \mathbf{S}, \mu)$不是可测群.（提示：令$D=\{(x,y): x=y\}=S(X\times\{e\})$. 假定$D\in\mathbf{S}\times\mathbf{S}$，则存在矩形的可列类$\mathbf{R}$使得$D\in\mathbf{S}(\mathbf{R})$. 設$\mathbf{E}$是由$\mathbf{R}$中矩形的边組成的[可列]类. 因为$D\in\mathbf{S}(\mathbf{E})\times\mathbf{S}(\mathbf{E})$，所以$D$的每一个截口屬于$\mathbf{S}(\mathbf{E})$. 但根据5.9c，$\mathbf{S}(\mathbf{E})$的势不大于連續統的势，这与关于$X$的势的假設条件相矛盾.)

(3) 設μ是局部緊群X上的哈尔測度，E是任意貝尔集，x是X中任意的元素；如果下列四个数

$$\mu(E), \mu(xE), \mu(Ex) \text{ 和 } \mu(E^{-1})$$

中任意一个为零，则其余三个也都为零.

(4) 設$(X, \mathbf{S}, \mu)$是可測群，其中μ是全有限測度；如果A是可測集，并且对于X中每一个x有$\mu(xA-A)=0$，则或是$\mu(A)=0$，或是$\mu(X-A)=0$.（提示：对A和$X-A$应用平均定理.）即使不假設μ为有限，这个結果也成立；用各态历經論的話来說，就是：如果将可測群看作在其本身上的保測变换群，则这个群具有度量推移性.

(5) 設μ是緊群X上的哈尔測度，则对于每一个貝尔集E和X中每一个x，

$$\mu(E)=\mu(xE)=\mu(Ex)=\mu(E^{-1}).$$

§60. 哈尔測度的唯一性

本节的目的是要証明，一个可測群里的哈尔測度本質上是唯一的.

定理 1. 設μ和ν是使得$(X, \mathbf{S}, \mu)$和$(X, \mathbf{S}, \nu)$为可測群的两个測度，E是$\mathbf{S}$中的集，并且$0<\nu(E)<\infty$，则对于定义在X上的每一个非負可測函数f，

$$\int f(x)\, d\mu(x)=\mu(E)\int \frac{f(y^{-1})}{\nu(Ey)}d\nu(y).$$

在后面关于唯一性的証明里，我們需要引用的乃是这个定理的質的方面：每一个μ-积分可以表为ν-积分的形狀.

証明. 令$g(y)=f(y^{-1})/\nu(Ey)$，由上节的結果可知，如果f是

非負可測函数，則 g 也是非負可測函数。和前面一样，令

$$S(x,y)=(x,xy), \qquad T(x,y)=(yx,y),$$

則在測度空間 $(X\times X, \mathbf{S}\times\mathbf{S}, \mu\times\nu)$ 里 S 和 T 都是保測变換，因而 $S^{-1}T$ 也是保測变換。因为 $S^{-1}T(x,y)=(yx,x^{-1})$，所以根据富比尼定理有

$$\begin{aligned}\mu(E)\int g(y)d\nu(y)&=\int\chi_E(x)d\mu(x)\int g(y)d\nu(y)=\\&=\int\chi_E(x)g(y)d(\mu\times\nu)(x,y)=\\&=\iint\chi_E(yx)g(x^{-1})d\nu(y)d\mu(x)=\\&=\int g(x^{-1})\nu(Ex^{-1})d\mu(x).\end{aligned}$$

但 $g(x^{-1})\nu(Ex^{-1})=f(x)$，定理于是証明完畢。∎

定理 2. 設 μ 和 ν 是使得 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 和 $(X,\mathbf{S},\nu)$ 为可測群的兩个測度，E 是 $\mathbf{S}$ 中的集，并且 $0<\nu(E)<\infty$，則对于 $\mathbf{S}$ 中每一个 F，

$$\mu(E)\nu(F)=\nu(E)\mu(F).$$

我們指出，这个結果事实上就是唯一性定理。定理断言：对于 $\mathbf{S}$ 中每一个 F，$\mu(F)=c\,\nu(F)$，其中 $c=\mu(E)/\nu(E)$ 是一个非負的有限常数；換一句話說，μ 和 ν 的区别只在一个常数因子。

証明。設 f 是 F 的特征函数。因为特别是当測度 μ 和 ν 相等时定理 1 也成立，所以我們有

$$\int f(x)d\nu(x)=\nu(E)\int\frac{f(y^{-1})}{\nu(Ey)}d\nu(y).$$

两端乘以 $\mu(E)$ 并应用定理 1，我們得到

$$\mu(E)\int f(x)d\nu(x)=\nu(E)\int f(x)\,d\mu(x). \quad ∎$$

定理 3. 設 μ 和 ν 是局部紧拓扑群 X 上的正則哈尔測度，則存在正的有限常数 c，使得对于每一个波雷耳集 E，$\mu(E)=c\nu(E)$。

証明。如果 $\mathbf{S}_0$ 是 X 中全体貝尔集类，則 $(X, \mathbf{S}_0, \mu)$ 和 $(X, \mathbf{S}_0, \nu)$ 都是可测群，因而根据定理 2，对于每一个贝尔集 E，$\mu(E) = c\nu(E)$，其中 c 是一个非負的有限常数；选任意有界貝尔开集作为 E，我們得到 $c > 0$。如果任意两个正則波雷耳测度（例如 μ 和 ν）在一切貝尔集上相等，則它們在一切波雷耳集上也相等（参看 §52 定理 8）。 ▍

(1) 一切非零实数乘法群中的哈尔测度对于勒貝格测度是絕对連續的；它的拉东-尼古丁导数是甚么？

(2) 設 μ 和 ν 分别是局部紧群 X 和 Y 中的哈尔测度，λ 是 $X \times Y$ 中的哈尔测度，則在 $X \times Y$ 中全体貝尔集类上 λ 是 $\mu \times \nu$ 与一个常数因子的乘积.

(3) 在 59.4 中建立起来的度量推移性可以用来証明具有有限测度的可测群中哈尔测度的唯一性定理. 首先設 μ 和 ν 都是左不变的测度，并且 $\nu \ll \mu$；于是，存在非負可积函数 f，使得对于每一个可测集 E，

$$\nu(E) = \int_E f(x) d\mu(x).$$

由此有

$$\nu(yE) = \int_{yE} f(x) d\mu(x) = \int_E f(y^{-1}x) d\mu(x),$$

又因 ν 是左不变的，所以 $f(x) = f(y^{-1}x) [\mu]$. 令 $N_t = \{x: f(x) < t\}$，則

$$\mu(yN_t - N_t) = \mu(\{x: f(y^{-1}x) < t\} - \{x: f(x) < t\}) = 0,$$

因此，对于每一个实数 t，或是 $\mu(N_t) = 0$，或是 $\mu(N_t') = 0$. 这就說明了，f 几乎处处等于一个常数 $[\mu]$，因而 $\nu = c\mu$. 在一般的場合，就是不假定 $\nu \ll \mu$ 的場合，我們以 $\mu + \nu$ 来代替 μ. 正如同在 59.4 中一样，上面的論点也可以应用到测度不一定为有限的場合.

(4) 設 $(X, \mathbf{S}, \mu)$ 是可测群，E 和 F 是可测集，則存在 X 中元素的两个叙列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 以及可测集的叙列 $\{A_n\}$，使得 (a) $\{x_n A_n\}$ 和 $\{y_n A_n\}$ 分别是 E 和 F 的不相交子集的叙列，(b) 可测集

$$E_0 = E - \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n A_n \quad \text{和} \quad F_0 = F - \bigcup_{n=1}^{\infty} y_n A_n$$

二者中至少有一个的测度为零.（提示：如果 E 或 F 的测度为零，命题显然

成立. 如果 E 和 F 的测度都是正的,应用 §59 定理 5, 选取 x_1, y_1 和 A_1, 使得 $\mu(A_1)>0$, $x_1A_1\subset E$, $y_1A_1\subset F$. 如果 $E-x_1A_1$ 或 $F-y_1A_1$ 的测度为零,则命题成立;如果二者的测度都是正的, 則又可应用 §59 定理 5. 利用可列或超限归納法可以完成命題的証明.)

因为这个結果对于一切左不变测度都成立,所以利用它又可以給出唯一性定理的另外一个証明. 設 μ 和 ν 都是左不变测度; 考虑下列对应关系: 对于每一个可测集 E, 以 $\mu(E)$ 与 $\nu(E)$ 相对应. 可以証明,这个对应关系是 μ 的一切值的集与 ν 的一切值的集之間的一个一一对应关系,并且是無歧义地确定的. 对于这个对应关系加以更詳尽但并不特别困难的考察,就可以得到唯一性定理.

(5) 設 μ 是局部緊群 X 上的正則哈尔测度. 对于 X 中任意的 x, 由等式 $\mu_x(E)=\mu(Ex)$ 确定的集函数 μ_x, 其中 E 是波雷耳集, 也是一个正則哈尔测度. 由唯一性定理可知, $\mu(Ex)=\Delta(x)\mu(E)$, 其中 $0<\Delta(x)<\infty$.

(5a) $\Delta(xy)=\Delta(x)\Delta(y)$; $\Delta(e)=1$.

(5b) 如果 x 屬于群 X 的中心, 則 $\Delta(x)=1$.

(5c) 如果 x 是一个交换子,或者,更一般地,如果 x 屬于由 X 中全体交换子組成的子群, 則 $\Delta(x)=1$.

(5d) 函数 Δ 是連續的. (提示: 令 C 为具有正测度的緊集, ε 是任意正数. 因为测度 μ 是正則的,所以存在有界开集 U, 使得 $C\subset U$ 并且 $\mu(U)\leqslant(1+\varepsilon)\mu(C)$. 設 V 是 e 的邻域, 使得 $V=V^{-1}$ 并且 $CV\subset U$; 如果 $x\in V$, 則有

$$\Delta(x)\mu(C)=\mu(Cx)\leqslant\mu(U)\leqslant(1+\varepsilon)\mu(C)$$

和

$$\frac{\mu(C)}{\Delta(x)}=\mu(Cx^{-1})\leqslant\mu(U)\leqslant(1+\varepsilon)\mu(C),$$

因此

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\leqslant\Delta(x)\leqslant1+\varepsilon.)$$

(5e) 我們得到緊群 X 上的左不变测度和右不变测度相等的另一个証明; 因为,由(5a) 和 (5d) 中的結果可知, $\Delta(X)$ 是正实数乘法群的一个緊子群.

(5f) 对于每一个波雷耳集 E,

$$\mu(E^{-1})=\int_E \frac{1}{\Delta(x)} d\mu(x).$$

(提示:根据右不变测度的唯一性定理,有

$$\mu(E^{-1})=c\int_E \frac{1}{\Delta(x)} d\mu(x),$$

其中 c 是某个正的有限常数. 因此,对于每一个可积函数 f,

$$\int f(x^{-1})d\mu(x)=c\int \frac{f(x)}{\Delta(x)} d\mu(x).$$

将 $f(x)$ 换为 $f(x^{-1})$,令 $g(x^{-1})=f(x^{-1})/\Delta(x)$,对 g 应用上面的等式,就有

$$\frac{1}{c}\int g(x^{-1})d\mu(x)=c\int g(x^{-1})d\mu(x).)$$

(5g) 如果 $\Gamma(x)$ 是与 $\Delta(x)$ 相类似的数: Γ 由等式 $\nu(xE)=\Gamma(x)\nu(E)$ 确定,其中 ν 是右不变测度,则 $\Gamma(x)=\frac{1}{\Delta(x)}$.

(6) 設局部緊群 X 上不恆等于零的貝尔測度 ν 具有下述性質: 对于 X 中每一个固定的 x,由等式 $\nu_x(E)=\nu(xE)$ 确定的测度 ν_x 是 ν 与一个非零常数因子的乘积;我們称 ν 是一个**相对不变测度**. 测度 ν 为相对不变测度的必要和充分条件是

$$\nu(E)=\int_E \phi(y)d\mu(y),$$

其中 μ 是哈尔测度,ϕ 是 X 在正实数乘法群中的一个同态. (提示: 如果 ϕ 是非負的,連續的,$\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$,并且

$$\nu(E)=\int_E \phi(y)d\mu(y),$$

则

$$\nu(xE)=\int_{xE} \phi(y)d\mu(y)=\int_E \phi(xy)d\mu(y)=$$

$$=\int_E \phi(x)\phi(y)d\mu(y)=\phi(x)\nu(E).$$

反之,如果 $\nu(xE)=\phi(x)\nu(E)$,则(参看(5)) $\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$,并且 ϕ 是連續的. 于是,积分

$$\tilde{\mu}(E)=\int_E \phi(y^{-1})\,d\nu(y)$$

存在，根据唯一性定理就有 $\tilde{\mu}=\mu$.）

(7) 設 μ 是定义在局部紧群 X 中全体貝尔集类 $\mathbf{S}_0$ 上的 σ–有限左不变测度，則 μ 是哈尔测度(在貝尔集上) 与一个常数因子的乘积；由此可知，特别是，μ 在紧集上为有限.（提示：如果 μ 不恆等于零，則 $(X, \mathbf{S}_0, \mu)$ 是一个可测群.）

第十二章

群里的測度和拓扑

§61. 以測度表拓扑

在上一章里我們已經証明，在每一个局部紧群里可以定出一个左不变的貝尔測度（或左不变的正則波雷耳測度），并且这个測度在实質上是唯一的。在这一章里我們要揭露，对于这种群来說，它的測度論和拓扑方面的性質之間有着極其密切的关系。特別是，在这一节里我們要建立一些定理，这类定理不但告訴我們測度可以由拓扑来确定，而且在相反的方面也說明了拓扑方面的一切概念都可以用測度論的术語来描述。在本节中我們假定：

X 是局部紧拓扑群，μ 是 X 上的正則哈尔測度，并且 $\rho(E, F) = \mu(E \Delta F)$，其中 E 和 F 是任意的波雷耳集。

定理 1. 設 E 是測度为有限的波雷耳集，对于 X 中每一个 x，令 $f(x) = \rho(xE, E)$，則 f 是連續函数。

証明. 設 $\varepsilon > 0$；因为 μ 是正則的，所以存在紧集 C 使得 $\rho(E, C) < \frac{\varepsilon}{4}$，并存在包含 C 的波雷耳开集 U 使得 $\rho(U, C) < \frac{\varepsilon}{4}$。設 V 是 e 的邻域，满足条件 $V = V^{-1}$ 和 $VC \subset U$。如果 $y^{-1}x \in V$，則 $x^{-1}y \in V$，因而

$$\begin{aligned}\rho(xC, yC) &= \mu(xC - yC) + \mu(yC - xC) = \\ &= \mu(y^{-1}xC - C) + \mu(x^{-1}yC - C) \leqslant \\ &\leqslant 2\mu(VC - C) \leqslant 2\mu(U - C) < \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

于是

$$|\rho(xE,E)-\rho(yE,E)|\leqslant$$
$$\leqslant\rho(xE,yE)\leqslant\rho(xE,xC)+\rho(xC,yC)+\rho(yC,yE)<\varepsilon. \quad \blacksquare$$

由定理 1 可知，对于每一个测度为有限的波雷耳集 E 以及每一个正数 ε, $\{x:\rho(xE, E)<\varepsilon\}$ 是开集。下面的定理說明，存在充分多的这类开集。

定理 2. 設 U 是 e 的任意邻域，則存在具有正的有限測度的貝尔集 E 以及正数 ε, 使得

$$\{x:\rho(xE,E)<\varepsilon\}\subset U.$$

証明。設 V 是 e 的邻域，滿足条件 $VV^{-1}\subset U$, 并設 E 是具有正的有限測度的貝尔集，滿足条件 $E\subset V$。如果 $0<\varepsilon<2\mu(E)$, 則

$$\{x:\rho(xE,E)<\varepsilon\}\subset\{x:xE\cap E\neq 0\}=EE^{-1}\subset VV^{-1}\subset U. \quad \blacksquare$$

由定理 1 和定理 2 可知，由一切形如 $\{x:\rho(xE,E)<\varepsilon\}$ 的集組成的类是一个在 e 处的基；因此，要用測度論的术語来描述拓扑方面的一切概念，的确是可能的。作为这种描述的一个詳尽的例子，我們現在对有界性給以測度論的表述。

定理 3. 集 A 为有界的必要和充分条件是：存在具有正的有限測度的貝尔集 E 以及滿足条件 $0\leqslant\varepsilon<2\mu(E)$ 的数 ε, 使得

$$A\subset\{x:\rho(xE,E)\leqslant\varepsilon\}.$$

証明。为了說明条件的充分性，我們要証明，如果 E 是具有正的有限測度的貝尔集，并且 $0\leqslant\varepsilon<2\mu(E)$, 則集 $\{x:\rho(xE,E)\leqslant\varepsilon\}$ 是有界的。設 δ 是一个正数，滿足条件 $4\delta<2\mu(E)-\varepsilon$, 并設 C 是 E 的紧子集，滿足条件 $\mu(E)-\delta<\mu(C)$。于是

$$\rho(xC,C)\leqslant\rho(xC,xE)+\rho(xE,E)+$$
$$+\rho(E,C)<2\delta+\rho(xE,E),$$

因而

$$\{x:\rho(\mu E,E)\leqslant\varepsilon\}\subset\{x:\rho\{xC,C)\leqslant\varepsilon+2\delta\}.$$

因为 $\varepsilon+2\delta<2\mu(C)$, 所以有

$$\{x:\rho(xE,E)\leqslant\varepsilon\}\subset\{x:\mu(xC\cap C)\neq 0\}\subset CC^{-1}.$$

现在証明条件的必要性．設 C 是紧集，滿足条件 $A\subset C$，并設 D 是测度为正的紧集．选择具有正的有限测度的貝尔集 E 使 $E\supset C^{-1}D\cup D$．因为 $D\subset E$，而当 $x\in C$ 时有 $D\subset xC^{-1}D\subset xE$，所以，当 $x\in C$ 时，$D\subset xE\cap E$．于是

$$A\subset C\subset\{x:D\subset xE\cap E\}\subset\{x:\rho(xE,E)\leqslant\varepsilon\},$$

其中 $\varepsilon=2(\mu(E)-\mu(D))$． ▌

(1) 如果将 $\rho(xE,E)$ 换为 $\mu(xE\cap F)$，其中 E 和 F 是具有正的有限测度的貝尔集，則与定理 1、2 和 3 相类似的定理都成立．

(2) 設 E 是一个固定的测度为有限的波雷耳集，令 $f(x)=xE$，則 f 是从 X 到由一切测度为有限的可测集組成的度量空間中的連續函数．

(3) 設 E 是测度为正的任意波雷耳集，則存在 e 的邻域 U，使得 $U\subset EE^{-1}$．

(4) X 为可分空間的必要和充分条件是：由一切测度为有限的可测集組成的度量空間是可分的．

(5) 設 E 是任意有界波雷耳集，对于 X 中每一个 x 以及 e 的每一个有界邻域 U，令

$$f_U(x)=\frac{\mu(E\cap Ux)}{\mu(Ux)},$$

則当 $U\to e$ 时 f_U 平均收斂(因而依测度收斂)到 χ_E．換一句話說，对于每一个正数 ε，存在 e 的有界邻域 V，使当 $U\subset V$ 有

$$\int|f_U-\chi_E|\,d\mu<\varepsilon.$$

这个結果可以叫做拓扑群的**稠密性定理**．(提示：設 V 是 e 的邻域，滿足下列条件：当 $y\in V$ 时 $\rho(yE,E)<\frac{\varepsilon}{2}$．如果 $U\subset V$，而 F 是任意波雷耳集，則

$$\frac{\varepsilon}{2}>\frac{1}{\mu(U)}\int_U\int_F|\chi_E(yx)-\chi_E(x)|\,d\mu(x)\,d\mu(y)\geqslant$$

$$\geqslant\left|\int_F d\mu(x)\int_U\frac{1}{\mu(U)}\chi_{E_x^{-1}}(y)\,d\mu(y)-\int_F\chi_E(x)\,d\mu(x)\int_U\frac{d\mu(y)}{\mu(U)}\right|=$$

$$=\left|\int_F(f_U(x)-\chi_E(x))\,d\mu(x)\right|.$$

[我們記得，对于任意波雷耳集 A 和 B 以及 X 中每一个 x，有 $\frac{\mu(A)}{\mu(B)}=\frac{\mu(Ax)}{\mu(Bx)}$；参看 60.5.] 首先对

$$F=\{x: f_U(x)-\chi_E(x)>0\}$$

然后对

$$F=\{x: f_U(x)-\chi_E(x)<0\}$$

应用这个結果，就得到命題的結論.)

(6) 設 ν 是定义在 X 中全体貝尔集类上的任意有限广义測度，則（参看 17.3）存在貝尔集 N_ν，使得对于每一个貝尔集 E，有 $\nu(E)=\nu(E\cap N_\nu)$. 如果 λ 和 ν 是两个这样的广义測度，对于每一个貝尔集 E，令

$$(\lambda*\nu)(E)=\iint_{N_\lambda\times N_\nu}\chi_E(x,y)d(\lambda\times\nu)(x,y),$$

我們称 $\lambda*\nu$ 为 λ 和 ν 的**結合**. 如果 λ 和 ν 分別是可积函数 f 和 g 的不定积分（对于哈尔測度 μ），則 $\lambda*\nu$ 是函数 h 的不定积分，其中

$$h(y)=\int f(x)g(x^{-1}y)d\mu(x).$$

(7) 設 λ 和 ν 是有限广义測度（参看 (6)），則

$$(\lambda*\nu)(E)=\int_{N_\lambda}\nu(x^{-1}E)d\lambda(x).$$

如果群 X 是阿倍尔群，則 $\lambda*\nu=\nu*\lambda$.

(8) 設 X 是局部紧，σ-紧的阿倍尔群，λ 和 ν 是定义在 X 中全体貝尔集类上的有限測度，則

$$\int\lambda(xE)d\nu(x)=\int\nu(xE^{-1})d\lambda(x).$$

（提示：如果 $\bar{\nu}(E)=\nu(E^{-1})$，$\bar{\lambda}(E)=\lambda(E^{-1})$，則

$$\int\lambda(xE)d\nu(x)=\int\lambda(x^{-1}E)d\bar{\nu}(x),$$

$$\int\nu(xE^{-1})d\lambda(x)=\int\bar{\nu}(x^{-1}E)d\lambda(x),$$

由关系式 $\lambda*\bar{\nu}=\bar{\nu}*\lambda$ 即得命題的結論.）

(9) 設 f 和 g 是定义在数直綫上的两个有界連續单調函数，則（参看 25.4）

$$\int_a^b f\,dg+\int_a^b g\,df=f(b)g(b)-f(a)g(a),$$

即，通常分部积分的等式成立．(提示：設 λ 和 ν 分别是由 f 和 g 引出的测度，对 λ 和 ν 应用 (8)，其中令 $E=\{x: -\infty<x<0\}$.)

§62. 魏尔拓扑

我們已經看到，如果把局部紧群里的可测性了解为按照貝尔意义的可测性，則每一个局部紧群是一个可測群；此外，局部紧群的拓扑由它的测度論結构唯一地确定．在本节里我們要考虑反面的問題：能不能在可測群里引进一种自然的拓扑結构，使它成为一个局部紧拓扑群？我們将要看到，对于这个問題的回答，在实質上是肯定的；以下我們进入細节的精确描述．

在本节中，我們假定所考虑的是一个固定的可测群 $(X,\mathbf{S},\mu)$；和通常一样，我們令 $\rho(E,F)=\mu(E\Delta F)$，其中 E 和 F 是任意的可測集．以記号 $\mathbf{A}$ 表示由一切形如 EE^{-1} 的集組成的类，其中 E 是具有正的有限測度的可測集；以記号 $\mathbf{N}$ 表示由一切形如 $\{x: \rho(xE,E)<\varepsilon\}$ 的集組成的类，其中 E 是具有正的有限測度的可測集，ε 是满足条件 $0<\varepsilon<2\mu(E)$ 的实数．

定理 1. 如果 $N=\{x:\rho(xE,E)<\varepsilon\}\in\mathbf{N}$，則每一个具有正測度的可测集 F 包含具有正的有限测度的可测子集 G，使得 $GG^{-1}\subset N$.

証明．只須考虑 F 具有有限測度的情形．如果 $T(x,y)=(yx,y)$，則 $T(E\times F)$ 是 $X\times X$ 中具有有限測度的可测集；因此，在 $X\times X$ 中存在集 A，使得 A 是有限多个可测矩形的併集，并且

$$\frac{\varepsilon}{4}\mu(F)>\rho(T(E\times F),A)=$$

$$=\iint|\chi_{T(E\times F)}(x,y)-\chi_A(x,y)|\,d\mu(x)d\mu(y)\geqslant$$

$$\geqslant\int_F\int|\chi_E(y^{-1}x)-\chi_A(x,y)|\,d\mu(x)d\mu(y).$$

令

$$C=\left\{y:\int|\chi_E(y^{-1}x)-\chi_A(x,y)|d\mu(x)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

則 $\mu(F\cap C)\leqslant\frac{1}{2}\mu(F)$，因而

$$\mu(F-C)\geqslant\frac{1}{2}\mu(F)>0.$$

如果 $y\in F-C$，則

$$\rho(yE,A^y)=\int|\chi_E(y^{-1}x)-\chi_A(x,y)|d\mu(x)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 A 是有限多个可測矩形的併集，所以形如 A^y 的集中只有有限多个是相异的；我們以 $A_1,\cdots,A_n$ 来表示它們。于是，我們所得到的結果可以用下面的关系式来表示：

$$F-C\subset\bigcup_{i=1}^{n}\left\{y:\rho(yE,A_i)<\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

由于 $\frac{\varepsilon}{2}<\mu(E)=\mu(yE)$，因此，根据 §59 定理 6，

$$\left\{y:\rho(yE,A_i)<\frac{\varepsilon}{2}\right\},\qquad i=1,\cdots,n$$

都是可測集；又因为 $\mu(F-C)>0$，所以上面这些集中至少有一个与 $F-C$ 交于一个測度为正的集。令

$$G_0=(F-C)\cap\left\{y:\rho(yE,\ A_i)<\frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

我們选定 i 的一个值使得 $\mu(G_0)>0$。显然，G_0 是具有正的有限測度的可測集，并且 $G_0\subset F$。如果 $y_1\in G_0^{-1}$，$y_2\in G_0^{-1}$，則

$$\rho(y_1y_2^{-1}E,E)=\rho(y_2^{-1}E,y_1^{-1}E)\leqslant$$

$$\leqslant\rho(y_2^{-1}E,A_i)+\rho(y_1^{-1}E,A_i)<\varepsilon.$$

因而 $G_0^{-1}G_0\subset N$。換一句話說，我們已經証明了，存在集 G_0，它具有定理的結論中所述除去关系式 $GG^{-1}\subset N$ 以外的全部性質；而与这个关系式相对应，我們有 $G_0^{-1}G_0\subset N$。如果現在对 F^{-1} 应用这个

結果，我們得到 F^{-1} 的一个子集，記为 G^{-1}；于是，集 G 具有定理結論中所述的全部性質。▌

定理 1 断言，特别是，$\mathbf{N}$ 中每一个集包含 $\mathbf{A}$ 中某个集。下面是反方向的定理。

定理 2. 如果 $A=EE^{-1}\in\mathbf{A}$, $0<\varepsilon<2\mu(E)$，并且

$$N=\{x:\rho(xE,E)<\varepsilon\},$$

則有 $N\in\mathbf{N}$ 和 $N\subset A$。

証明。显然，$N\in\mathbf{N}$；要証明 $N\subset A$，只須注意到关系式 $N\subset\{x:xE\cap E\neq 0\}=EE^{-1}$。▌

定理 3. 如果 $N=\{x:\rho(xE,E)<\varepsilon\}\in\mathbf{N}$，則 N 是測度为正的可測集。如果 $\mu(E^{-1})<\infty$，則 $\mu(N)<\infty$。

証明。因为

$$N=\left\{x:\mu(xE\cap E)>\mu(E)-\frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

由 §59 定理 6 即得 N 的可測性。要証明 $\mu(N)>0$，我們应用定理 1。設 G 是具有正的測度并滿足条件 $GG^{-1}\subset N$ 的可測集，則特别是对于 G 中任意的 y，有 $Gy^{-1}\subset N$。定理的最后一部分可由关系式

$$\left(\mu(E)-\frac{\varepsilon}{2}\right)\mu(N)\leqslant\int_N\mu(xE\cap E)\,d\mu(x)\leqslant$$

$$\leqslant\int\mu(xE\cap E)\,d\mu(x)=\mu(E)\mu(E^{-1})$$

导出。▌

定理 4. 設 A 和 B 是 $\mathbf{A}$ 中任意的两个集，則在 $\mathbf{A}$ 中存在集 C，使得 $C\subset A\cap B$。

証明。設 E 和 F 是具有正的有限測度的可測集，使得 $A=EE^{-1}$ 和 $B=FF^{-1}$。根据 §59 定理 5，存在具有正的有限測度的可測集 G，并存在 X 中的元素 x 和 y，使得

$$Gx \subset E \text{ 和 } Gy \subset F.$$

如果 $C = GG^{-1}$，則 $C \in \mathbf{A}$，并且

$$C = (Gx)(Gx)^{-1} \subset A, \quad C = (Gy)(Gy)^{-1} \subset B. \quad \blacksquare$$

在引进前面提到的 X 中的拓扑以前，我們还需要定义一个概念。我們記得，我們的可測群的定义是通过拓扑群的連續性而引进的，在定义里絲毫也沒有提到可分公理；而可分公理在拓扑群的定义里是一个主要的构成部分。拓扑群里可分公理的一种表达方式如下：对于群中异于 e 的任意元素 x，存在 e 的邻域 U 使得 $x \in' U$。根据以上的考虑以及 §61 定理 1 和 2，我們給出下面的定义：如果对于可測群 X 中异于 e 的任意元素 x，存在具有正的有限測度的可測集 E，使得 $\rho(xE, E) > 0$，則称 X 具有**可分性**。

定理 5. 設 X 具有可分性，如果取类 $\mathbf{N}$ 作为在 e 处的基，則对于如此定出的拓扑而言，X 是一个拓扑群。

我們称可測群 X 的这个拓扑結构为**魏尔拓扑**。

証明。我們将証明，$\mathbf{N}$ 满足 §0 中所述的条件 (a)，(b)，(c)，(d) 和 (e)。

設 $x_0 \in X$，$x_0 \neq e$，并設 E 是具有正的有限測度的可測集，使得 $\rho(x_0E, E) > 0$。如果 ε 是滿足条件 $0 < \varepsilon < \rho(x_0E, E)$ 的正数，則 $\varepsilon < 2\mu(E)$。由此可見，若令 $N = \{x : \rho(xE, E) < \varepsilon\}$，則 $M \in \mathbf{N}$，并且显然有 $x_0 \in' N$。

如果 $N \in \mathbf{N}$，$M \in \mathbf{N}$，則由定理 1 可知，在 $\mathbf{A}$ 中存在集 A 和 B，使得 $A \subset N$ 和 $B \subset M$。由定理 4 可知，在 $\mathbf{A}$ 中存在集 C，使得 $C \subset A \cap B$；应用定理 2，我們得到 $\mathbf{N}$ 中的集 K，滿足关系式

$$K \subset C \subset A \cap B \subset N \cap M.$$

如果 $N = \{x : \rho(xE, E) < \varepsilon\}$，我們令 $M = \left\{x : \rho(xE, E) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$。对于 M 中任意两个元素 x_0 和 y_0，我們有

$$\rho(x_0y_0^{-1}E, E) \leqslant \rho(y_0^{-1}E, E) + \rho(x_0^{-1}E, E) =$$
$$= \rho(y_0E, E) + \rho(x_0E, E) < \varepsilon,$$

因而 $MM^{-1}\subset N$。

如果 $N\in\mathbf{N}$, $x\in X$, 則由定理 1 可知，存在具有正的有限測度的可測集 E, 使得 $EE^{-1}\subset N$。对 $\mathbf{A}$ 中的集 $(xE)(xE)^{-1}$ 应用定理 2, 我們得到 $\mathbf{N}$ 中的集 M, 使得

$$M\subset(xE)(xE)^{-1}=xEE^{-1}x^{-1}\subset xNx^{-1}.$$

最后，如果 $N=\{x:\rho(xE,E)<\varepsilon\}\in\mathbf{N}$, 而 $x_0\in N$, 則 $\rho(x_0E,E)<\varepsilon$。因为 $\varepsilon<2\mu(E)$, 所以 $\varepsilon-\rho(x_0E,E)<2\mu(x_0E)$； 由此可見，如果

$$M=\{x:\rho(xx_0E,x_0E)<\varepsilon-\rho(x_0E,E)\},$$

則 $M\in\mathbf{N}$。因为

$$Nx_0^{-1}=\{xx_0^{-1}:\rho(xE,E)<\varepsilon\}=\{x:\rho(xx_0E,E)<\varepsilon\},$$

所以，对于 M 中每一个 x, 有

$$\rho(xx_0E,E)\leqslant\rho(xx_0E,x_0E)+\rho(x_0E,E)<$$
$$<(\varepsilon-\rho(x_0E,E))+\rho(x_0E,E)=\varepsilon.$$

于是 $x\in Nx_0^{-1}$, 因而 $Mx\subset N$。 ▌

定理 6. 設 X 是具有可分性的可測群，則对于它的魏尔拓扑而言，X 是局部有界的。如果可測集 E 具有非空的內部，則 $\mu(E)>0$; 如果可測集 E 是有界的，則 $\mu(E)<\infty$。

証明. 設 N_0 是 $\mathbf{N}$ 中具有有限測度的任意集（参看定理 3），并設 M_0 是 $\mathbf{N}$ 中滿足条件 $M_0M_0^{-1}\subset N_0$ 的集。我們将証明 M_0 是有界的。假定 M_0 不是有界的，則存在 $\mathbf{N}$ 中的集 N 并存在 M_0 中元素的叙列 $\{x_n\}$, 使得

$$x_{n+1}\in'\bigcup_{i=1}^{n}x_iN,\qquad n=1,2,\cdots.$$

根据定理 1, 存在具有正的有限測度的可測集 E, 使得 $E\subset M_0^{-1}$ 和 $EE^{-1}\subset N$。由 $\{x_n\}$ 的性質可知，$\{x_nE\}$ 是不相交集的叙列；又因为 $x_nE\subset M_0M_0^{-1}\subset N_0$, 所以 $\mu(N_0)=\infty$。这与定理 3 相矛盾，于是証明了定理的第一部分。

由定理 3 可知，有非空內部的可測集具有正的測度。定理的

最后一部分可由定理 3 和下述事实导出：有界集能被 N 中任意集的有限多个左轉移所遮盖。 ▌

定理 6 在某种意义下是关于这方面能够得到的最好的結果了。然而，如果我們应用下述事实：每一个局部有界群可以看作某个局部紧群的稠密子群，我們就可以把上面的結果表成更为有用的形式。我們在定理 8 里給出这种表达的方式；現在我們先証明关于局部紧群中任意（就是不一定是右或左不变的）貝尔测度的一个輔助定理。

定理 7. 設 μ 是局部紧拓扑群 X 中的任意貝尔测度，Y 是由具有下列性質的一切元素 y 組成的集：对于任意貝尔集 E，$\mu(yE)=\mu(E)$；則 Y 是 X 的閉子群。

証明。Y 显然是 X 的子群。为了証明 Y 是閉的，設 y_0 是 $\overline{Y}$ 中任意固定的元素，并設 C 是任意紧貝尔集。如果 U 是包含 y_0C 的任意貝尔开集，則存在 e 的邻域 V，使得 $Vy_0C\subset U$。因为 Vy_0 是 y_0 的邻域，所以在 Y 中存在元素 y，使得 $y\in Vy_0$。因为 $yC\subset Vy_0C\subset U$，所以

$$\mu(C)=\mu(yC)\leqslant\mu(U),$$

根据 μ 的正則性就有 $\mu(C)\leqslant\mu(y_0C)$。对 y_0^{-1} 和 y_0C（代替 y_0 和 C）应用这个結果，我們得到反方向的不等式；于是，对于任意的 C，我們有 $\mu(C)=\mu(y_0C)$。由此可見，对于每一个貝尔集 E，$\mu(E)=\mu(y_0E)$，因而 $y_0\in Y$。 ▌

可测群的子群如果是一个濃厚集（参看 §17），我們称这个子群是可测群的**濃厚子群**。

定理 8. 設 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 是具有可分性的可测群，則存在局部紧拓扑群 $\hat{X}$ 以及定义在全体貝尔集类 $\hat{\mathbf{S}}$ 上的哈尔测度 $\hat{\mu}$，使得 X 是 $\hat{X}$ 的濃厚子群，$\mathbf{S}\supset\hat{\mathbf{S}}\cap X$，并且当 $\hat{E}\in\hat{\mathbf{S}}$ 和 $E=\hat{E}\cap X$ 时，$\mu(E)=\hat{\mu}(\hat{E})$。

証明。設 $\hat{X}$ 是 X 关于它的魏尔拓扑的增补，就是說，$\hat{X}$ 是一

个局部紧群，包含 X 作为它的稠密子群。考虑由 $\hat{X}$ 的一切这样的子集 $\hat{E}$ 組成的类：$\hat{E}\cap X\in\mathbf{S}$。这个类显然是一个 σ-环；为了証明这个 σ-环包含一切貝尔集，我們将証明，它包含群 $\hat{X}$ 的拓扑的某个基。

設 $\hat{x}$ 是 $\hat{X}$ 的任意元素，$\hat{U}$ 是 $\hat{X}$ 中单位元素 $\hat{e}$ 的任意邻域；幷設 $\hat{V}$ 是 $\hat{e}$ 的邻域，使得 $\hat{V}^{-1}\hat{V}\subset\hat{U}$。因为 $\hat{V}\cap X$ 是 X 中的开集，所以在 X 中存在可测开集 W，使得 $W\subset\hat{V}\cap X$；由于（根据 $\hat{X}$ 的定义）X 中的拓扑結构是 X 作为 $\hat{X}$ 的子空間而得到的相对拓扑，因此，在 $\hat{X}$ 中存在开集 $\hat{W}$，使得 $W=\hat{W}\cap X$。因为 W 总可以换为 $\hat{W}\cap\hat{V}$，所以我們可以假定 $\hat{W}\subset\hat{V}$ 而不致丧失普遍性。由于 X 在 $\hat{X}$ 中稠密，因此，在 X 中存在点 x，使得 $x\in\hat{x}\hat{W}^{-1}$；于是

$$\hat{x}\in x\hat{W}\subset\hat{x}\hat{W}^{-1}\hat{W}\subset\hat{x}\hat{V}^{-1}\hat{V}\subset\hat{x}U.$$

对于 $\hat{\mathbf{S}}$ 中每一个 $\hat{E}$，令 $\hat{\mu}(\hat{E})=\mu(\hat{E}\cap X)$；不难驗証，$\hat{\mu}$ 是 $\hat{X}$ 中的貝尔测度。因为当 $x\in X$ 和 $\hat{E}\in\hat{\mathbf{S}}$ 时有 $\hat{\mu}(x\hat{E})=\hat{\mu}(\hat{E})$，由定理 7 可知，$\hat{\mu}$ 是左不变的。按照唯一性定理，$\hat{\mu}$ 在 $\hat{\mathbf{S}}$ 上与 $\hat{X}$ 中一个哈尔测度重合。于是，当 $\hat{E}\in\hat{\mathbf{S}}$ 和 $\hat{E}\cap X=0$ 时，$\hat{\mu}(\hat{E})=\mu(\hat{E}\cap X)=0$，就是說，$X$ 在 $\hat{X}$ 中是濃厚的。 ▌

(1) 設 X 是局部紧拓扑群，$\mathbf{S}$ 是全体貝尔集类，μ 是 $\mathbf{S}$ 上的哈尔测度。令 $\tilde{X}=X\times X$，如果 $\tilde{\mathbf{S}}$ 是由一切形如 $E\times X$ 的集組成的类，其中 $E\in\mathbf{S}$，幷令 $\tilde{\mu}(E\times X)=\mu(E)$，則 $(\tilde{X},\tilde{\mathbf{S}},\tilde{\mu})$ 是一个可测群，不具有可分性。这个例子在怎样的程度內表現了一般不具有可分性的可测群的典型性？

(2) 設 X 是具有可分性的可测群，則集 E 对于 X 的魏尔拓扑为有界的必要和充分条件是：存在具有正的有限测度的可测集 A，使得 EA 被一个测度为有限的可测集所包。

(3) 定理 7 对于波雷耳测度是否成立？

(4) 定理 7 中所述的子群 Y 是否必須是不变的？

(5) 在定理 7 的假設条件下，对于 X 中每一个 x 以及每一个貝尔集 E，令 $f(x)=\mu(xE)$。f 是不是連續函数？

(6) 下面一系列命題的目的在于給出濃厚子群的一个例子。設 X 是数

直綫，考虑局部紧拓扑群 $X\times X$. X 的子集 B 称为**綫性無关的**，如果条件

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0, \qquad x_i \in B, \qquad i=1, \cdots, n$$

蘊涵 $r_1=\cdots=r_n=0$，其中 r_i 是有理数.

(6a) 如果 E 是 $X\times X$ 中测度为正的波雷耳集，B 是 X 中綫性無关的集，它的势小于連續統的势，則在 E 中存在点 (x, y)，使得 $B\cup\{x\}$ 是綫性無关集.（提示：存在 y 的値使 B^y 具有正的測度，因而具有連續統的势.）

(6b) 在 $X\times X$ 中存在集 C，使得 (i) 对于 $X\times X$ 中每一个測度为正的波雷耳集 E, $C\cap E\neq 0$，(ii) 由 C 中一切点的第一个坐标組成的集 B 是綫性無关的，(iii) C 与任何垂直直綫至多交于一点.（提示：把 $X\times X$ 中全体測度为正的波雷耳集类作成正序集，利用 (6a)，用超限归納法建立 C.）

(6c) 設 B 是 X 中具有下列性質的綫性無关集：对于 X 中每一个 x，存在 B 的有限子集 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 以及对应的有理数有限集 $\{r_1, \cdots, r_n\}$，使得

$$x=\sum_{i=1}^{n} r_i x_i;$$

我們称 B 是一个**海末尔基**. x 表为 B 中元素的有理綫性組合的表示式是唯一的. 每一个綫性無关集被一个海末尔基所包.（提示：利用超限归納法或桑恩輔助定理.）

(6d) 根据 (6b) 和 (6c)，在 $X\times X$ 中存在集 C，具有 (6b) 中所述的性質 (i)，(ii) 和 (iii)，并使得由 C 中一切点的第一个坐标組成的集 B 是一个海末尔基. 設 $x=\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$，其中 r_i 是有理数，$(x_i, y_i)\in C$，$i=1, \cdots, n$；令 $f(x)=\sum_{i=1}^{n} r_i y_i$. 如果 $Z=\{(x, y): y=f(x)\}$（即 Z 是 f 的圖象），則 Z 是 $X\times X$ 的濃厚子群.

§63. 因　子　群

在本节內我們假定：

X 是局部紧拓扑群，μ 是 X 中的哈尔测度；Y 是 X 的紧不变

子群，ν 是 Y 中使得 $\nu(Y)=1$ 的哈尔测度，π 是从 X 到因子群 $\hat{X}=X/Y$ 上的射影。

虽然本节的大部分結果对于閉的（但不一定是紧的）子群 Y 成立，但我們只限于討論紧子群的情形，因为这对我們来說已經够用了，并且在这种情形下的証明比一般情形的証明稍微簡单一些。

定理 1. 如果紧集 C 是 Y 的陪集之併，而 U 是包含 C 的开集，則在 $\hat{X}$ 中存在开集 $\hat{V}$，使得

$$C\subset\pi^{-1}(\hat{V})\subset U.$$

証明. 我們可以假定 U 是有界集而不致丧失普遍性。令 $X_0=\overline{UY}$，則 X_0 是紧集。我們断言，与 UY 一样，X_0 也是 Y 的陪集之併。为了証明这个事实，假定 $x_1\in X_0$ 且 $\pi(x_1)=\pi(x_2)$（因而 $x_1^{-1}x_2\in Y$）；我們将証明 $x_2\in X_0$。設 V 是 x_2 的任意邻域，則 $Vx_2^{-1}x_1$ 是 x_1 的邻域，因此 $UY\cap Vx_2^{-1}x_1\neq 0$。因为 $x_1^{-1}x_2\in Y$，所以

$$UY\cap V=UYx_1^{-1}x_2\cap Vx_2^{-1}x_1x_1^{-1}x_2=$$
$$=(UY\cap Vx_2^{-1}x_1)x_1^{-1}x_2\neq 0;$$

由于 V 是任意的，这就說明了 $x_2\in X_0$。

由于 C 是 Y 的陪集之併，因此

$$\pi(X_0-U)\cap\pi(C)=\pi((X_0-U)\cap C)=0.$$

因为 $\pi(X_0-U)$ 和 $\pi(C)$ 都是紧集，而 $\pi(U)$ 是包含 $\pi(C)$ 的开集，所以在 $\hat{X}$ 中存在开集 $\hat{V}$，使得

$$\pi(C)\subset\hat{V}\subset\pi(U)\subset\pi(X_0)\qquad\text{和}\qquad\hat{V}\cap\pi(X_0-U)=0.$$

如果 $x\in\pi^{-1}(\hat{V})$，从而 $\pi(x)\in\hat{V}$，則 $\pi(x)\in'\pi(X_0-U)$，因而 $x\in' X_0-U$。但因 $x\in X_0$，于是 $x\in U$，因此 $C\subset\pi^{-1}(\hat{V})\subset U$。 ▌

定理 2. 如果 $\hat{C}$ 是 $\hat{X}$ 的紧子集，則 $\pi^{-1}(\hat{C})$ 是 X 的紧子集；如果 $\hat{E}$ 是 $\hat{X}$ 中的貝尔集[或波雷耳集]，則 $\pi^{-1}(\hat{E})$ 是 X 中的貝尔集[或波雷耳集]。

証明. 設 $\mathbf{K}$ 是 $\pi^{-1}(\hat{C})$ 的开复盖。对于 $\hat{C}$ 中任意的 $\hat{x}$，$\pi^{-1}(\{\hat{x}\})$ 是 Y 的陪集，因而是紧集；于是，$\mathbf{K}$ 包含有限子类 $\mathbf{K}(\hat{x})$

使得 $\pi^{-1}(\{\hat{x}\})\subset U(\hat{x})=\bigcup \mathbf{K}(\hat{x})$。根据定理1，在 $\hat{X}$ 中存在开集 $\hat{V}(\hat{x})$ 使得

$$\pi^{-1}(\{\hat{x}\})\subset V(\hat{x})=\pi^{-1}(\hat{V}(\hat{x}))\subset U(\hat{x}).$$

因为 $\hat{C}$ 是紧集，所以 $\hat{C}$ 包含有限子集 $\{\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_n\}$ 使得 $\hat{C}\subset \bigcup_{i=1}^{n}\hat{V}(\hat{x}_i)$；于是

$$\pi^{-1}(\hat{C})\subset \bigcup_{i=1}^{n} V(\hat{x}_i)\subset \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup \mathbf{K}(\hat{x}_i),$$

因此，$\pi^{-1}(\hat{C})$ 是紧集。

定理中关于貝尔集和波雷耳集的結論可由上段的結果以及下述事实得出：G_δ 集的原像(对于 π)是 G_δ 集，由 $\hat{X}$ 中原像屬于某个預先指定的 σ-环的一切集組成的类是一个 σ-环。 ▌

由定理2可知，如果 X 和 $\hat{X}$ 中的可測性都了解为按照貝尔意义的可測性，或都了解为按照波雷耳意义的可測性，則变换 π 是可測的。换一句話說，π^{-1} 对于可測集的变换是令人滿意的；現在我們要問，π^{-1} 对于測度的变换如何？

定理 3. 如果 $\hat{\mu}=\mu\pi^{-1}$，則 $\hat{\mu}$ 是 $\hat{X}$ 中的哈尔測度。

証明. 因为紧集或非空开集的原像(对于 π)分別是紧集或非空开集，所以 $\hat{\mu}$ 在紧集上为有限而在非空波雷耳开集上为正。剩下需要証明的是 $\hat{\mu}$ 的左不变性。

設 $\hat{E}$ 是 $\hat{X}$ 中的波雷耳集，$\hat{x}_0\in\hat{X}$，并設 x_0 是 X 中使得 $\pi(x_0)=\hat{x}_0$ 的元素. 如果 $x\in x_0\pi^{-1}(\hat{E})$，則(因为 π 是一个同态) $\pi(x)\in\hat{x}_0\hat{E}$，因此

$$x_0\pi^{-1}(\hat{E})\subset\pi^{-1}(\hat{x}_0\hat{E}).$$

反之，設 $x\in\pi^{-1}(\hat{x}_0\hat{E})$，則 $\pi(x)\in\hat{x}_0\hat{E}$，因而 $\pi(x_0^{-1}x)=\hat{x}_0^{-1}\pi(x)\in\hat{E}$. 由此有 $x_0^{-1}x\in\pi^{-1}(\hat{E})$，从而 $x\in x_0\pi^{-1}(\hat{E})$。于是，我們已經証明了

$$\pi^{-1}(\hat{x}_0\hat{E})\subset x_0\pi^{-1}(\hat{E}),$$

由此得到

$$\hat{\mu}(\hat{x}_0\hat{E})=\mu\pi^{-1}(\hat{x}_0\hat{E})=\mu(x_0\pi^{-1}(\hat{E}))=\mu\pi^{-1}(\hat{E})=\hat{\mu}(\hat{E}).$$ ▌

定理 4. 如果 $f\in\mathscr{L}_+(X)$，并且

$$g(x)=\int_Y f(xy)d\nu(y),$$

則 $g\in\mathscr{L}_+(X)$，并且在 $\mathscr{L}_+(\hat{X})$ 中存在(唯一确定的)函数 $\hat{g}$ 使得 $g=\hat{g}\pi$。

証明。如果 $f_x(y)=f(xy)$，則因 f 是連續的，所以 f_x 在 Y 上連續，因而可积。f 是一致連續的，就是說，对于每一个正数 ε，存在 e 的邻域 U 使当 $x_1x_2^{-1}\in U$ 时有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。如果 $x_1x_2^{-1}\in U$，則

$$(x_1y)(x_2y)^{-1}=x_1x_2^{-1}\in U,$$

因而

$$|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant\int_Y|f(x_1y)-f(x_2y)|d\nu(y)<\varepsilon,$$

所以 g 是連續的。g 显然是非負的；又因

$$\{x:g(x)\neq 0\}\subset\{x:f(x)\neq 0\}\cdot Y,$$

于是有 $g\in\mathscr{L}_+(X)$。

如果 $\pi(x_1)=\pi(x_2)$，則 $x_1^{-1}x_2\in Y$，由 ν 的左不变性可知

$$g(x_1)=\int_Y f(x_1y)d\nu(y)=\int_Y f(x_1(x_1^{-1}x_2y))d\nu(y)=g(x_2).$$

于是，若令 $\hat{g}(\hat{x})=g(x)$，其中 $\hat{x}=\pi(x)$，則在 $\hat{X}$ 上無歧义地定出了一个函数 $\hat{g}$；显然，$g=\hat{g}\pi$。对于数直綫上的每一个开集 M，我們有

$$\{\hat{x}:\hat{g}(\hat{x})\in M\}=\pi(\{x:g(x)\in M\})$$

(参看 §39 定理 1)，因为 π 是开变换，所以 $\hat{g}$ 是連續的。由于 π 将有界集 $\{x:g(x)\neq 0\}$ 映为 $\hat{X}$ 中的某个有界集，因此，$\hat{g}\in\mathscr{L}_+(\hat{X})$；因为 π 将 X 映为整个空間 $\hat{X}$，所以 $\hat{g}$ 是唯一的。▮

定理 5. 如果 C 是 X 中的紧貝尔集，并且 $g(x)=\nu(x^{-1}C\cap Y)$，則存在(唯一确定的)定义在 $\hat{X}$ 上的貝尔可测且可积的函数 $\hat{g}$，使得 $g=\hat{g}\pi$。如果 C 是 Y 的陪集之併，則

$$\int \hat{g} d\hat{\mu} = \mu(C).$$

証明。設 $\{f_n\}$ 是 $\mathscr{L}_+(X)$ 中函数的遞減叙列，使得对于 X 中每一个 x, $\lim_n f_n(x) = \chi_C(x)$。如果

$$g_n(x) = \int_Y f_n(xy) d\nu(y), \quad n = 1, 2, \cdots,$$

則 $\{g_n\}$ 是 $\mathfrak{L}_+(X)$ 中函数的遞減叙列（参看定理 4），于是(例如，根据有界收斂定理)，对于 X 中每一个 x,

$$\lim_n g_n(x) = \int_Y \chi_C(xy)\, d\nu(y) = \int_Y \chi_{x^{-1}C}(y) d\nu(y) =$$
$$= \nu(x^{-1}C \cap Y) = g(x).$$

根据定理 4，对于每一个正整数 n，在 $\mathscr{L}_+(\hat{X})$ 中存在函数 $\hat{g}_n$，使得 $g_n = \hat{g}_n \pi$。因为叙列 $\{\hat{g}_n\}$ 是遞減的，所以可令 $\hat{g}(\hat{x}) = \lim_n \hat{g}_n(\hat{x})$；显然，$g = \hat{g}\pi$。因为(§39 定理 3)

$$\int \hat{g} d\hat{\mu} = \int g d\mu = \int \nu(x^{-1}C \cap Y) d\mu(x),$$

并且 $\{x : \nu(x^{-1}C \cap Y) \neq 0\} \subset \{x : x^{-1}C \cap Y \neq 0\} = CY$，由 ν 的有限性可知，g 是可积的。

最后，設 C 是 Y 的陪集之併，則

$$x^{-1}C \cap Y = \begin{cases} Y, & 若\ x \in C, \\ 0, & 若\ x \,\overline{\in}\, C, \end{cases}$$

于是

$$\int \hat{g} d\hat{\mu} = \int g d\mu = \int \nu(x^{-1}C \cap Y) d\mu(x) = \mu(C). \quad \blacksquare$$

定理 6. 設 E 是 X 中任意貝尔集，如果

$$g_E(x) = \nu(x^{-1}E \cap Y),$$

則存在(唯一确定的)定义在 $\hat{X}$ 上的貝尔可測函数 $\hat{g}_E$，使得 $g_E = \hat{g}_E \pi$.

証明。我們首先注意到(根据 Y 中拓扑的定义)，$x^{-1}E \cap Y$ 是 Y 中的貝尔集，因此，对于任意的 x，$g_E(x)$ 总是有定义的。

設 **E** 是由能使定理的結論成立的一切集 E 組成的类，則由定理5可知，一切紧貝尔集屬于 **E**。根据(有限)測度 ν 的基本性質，**E** 封閉于正常差，不相交有限併以及单調併，单調交的运算，因此 **E** 包含一切貝尔集。▌

定理 7. 設 E 是 X 中任意貝尔集，如果 $\hat{g}_E$ 是 $\hat{X}$ 上唯一确定的具有下列性質的貝尔可測函数：对于 X 中每一个 x，

$$\hat{g}_E(\pi(x))=\nu(x^{-1}E\cap Y)=g_E(x),$$

則对于每一个貝尔集 E，有

$$\int \hat{g}_E\, d\hat{\mu}=\mu(E).$$

証明. 对于 X 中每一个貝尔集 E，令

$$\lambda(E)=\int \hat{g}_E d\hat{\mu}=\int \nu(x^{-1}E\cap Y)d\mu(x).$$

因为对于每一个紧貝尔集 C，$\lambda(C)$ 是有限的（定理 5），并且 λ 显然是非負的，所以 λ 是 X 中的貝尔測度。設 $x_0\in X$，于是

$$\begin{aligned}\lambda(x_0E)&=\int g_{x_0E}(x)d\mu(x)=\int \nu(x^{-1}x_0E\cap Y)d\mu(x)=\\&=\int \nu((x_0^{-1}x)^{-1}E\cap Y)d\mu(x)=\int g_E(x_0^{-1}x)d\mu(x)=\\&=\int g_E(x)d\mu(x)=\lambda(E),\end{aligned}$$

就是說，λ 是左不变的。由唯一性定理可知，$\lambda(E)=c\mu(E)$，其中 c 是某个常数。如果 C 是紧貝尔集，并且是 Y 的陪集之併，則根据定理 5，$\lambda(C)=\mu(C)$，又因为存在使 $\mu(C)>0$ 的这种集 C，所以 $c=1$。▌

§64. 哈尔測度的正則性

本节的目的是要証明，每一个哈尔測度是正則的。在本节內，除去最后一个定理外，我們假定：

X 是局部紧和 σ-紧的拓扑群，μ 是 X 中不恒等于零的左不变貝尔測度（因而在一切非空貝尔开集上取正值）。

为了用起来方便起見，我們引进下面的輔助概念。設 $\mathbf{T}$ 是由貝尔集組成的一个 σ-环，滿足下列条件：当 $E\in\mathbf{T}$ 和 $x\in X$ 时，$xE\in\mathbf{T}$；我們称 $\mathbf{T}$ 是**不变 σ-环**。因为全体貝尔集类是一个不变 σ-环，并且任意多个不变 σ-环的交仍是一个不变 σ-环，所以，如果 $\mathbf{E}$ 是貝尔集的任意类，我們可以把包含 $\mathbf{E}$ 的一切不变 σ-环的交定义为**由 $\mathbf{E}$ 产生的不变 σ-环**。

定理 1. 設 $\mathbf{E}$ 是一个貝尔集类，$\mathbf{T}$ 是由 $\mathbf{E}$ 产生的不变 σ-环，則 $\mathbf{T}$ 与由类 $\{xE: x\in X,\ E\in\mathbf{E}\}$ 产生的 σ-环 $\mathbf{T}_0$ 重合。

証明。对于 X 中每一个 x 以及 $\mathbf{E}$ 中每一个 E，我們有 $xE\in\mathbf{T}$，因此 $\mathbf{T}_0\subset\mathbf{T}$；于是，只須証明 $\mathbf{T}_0$ 是不变的。設 x_0 是 X 中任意固定的元素。由能使关系式 $x_0F\in\mathbf{T}_0$ 成立的一切貝尔集 F 組成的类是一个 σ-环；而对于 X 中每一个 x 和 $\mathbf{E}$ 中每一个 E，有 $x_0(xE)=(x_0x)E\in\mathbf{T}_0$，所以上述 σ-环包含 $\mathbf{T}_0$。換一句話說，我們已經証明，如果 $F\in\mathbf{T}_0$，則 $x_0F\in\mathbf{T}_0$。 ▌

定理 2. 設 $\mathbf{E}$ 是測度为有限的貝尔集的可列类，$\mathbf{T}$ 是由 $\mathbf{E}$ 产生的不变 σ-环，則由 $\mathbf{T}$ 中測度为有限的一切集組成的度量空間（度量 ρ 由等式 $\rho(E,F)=\mu(E\Delta F)$ 定义）是可分的。

証明。因为可分度量空間的每一个子空間是可分的，所以只須証明，存在由貝尔集組成的 σ-环 $\mathbf{T}_0$，使得 $\mathbf{T}\subset\mathbf{T}_0$，并使得 $\mathbf{T}_0$ 能由測度为有限的集的可列类产生（参看 §40 定理 2）。由于 X 是一个貝尔集，因此，对于 $\mathbf{E}$ 中每一个 E，$X\times E$ 是 $X\times X$ 中的貝尔集。如果令 $S(x,y)=(x,xy)$，則对于 $\mathbf{E}$ 中每一个 E，$S(X\times E)$ 也是 $X\times X$ 中的貝尔集。因此，对于 $\mathbf{E}$ 中每一个 E，存在測度为有限的矩形的可列类 $\mathbf{R}_E$，使得 $S(X\times E)\in\mathbf{S}(\mathbf{R}_E)$。設 $\mathbf{T}_0$ 是由一切 $\mathbf{R}_E$ 中的一切矩形的一切边組成的类所产生的 σ-环，其中 $E\in\mathbf{E}$，則对于 $\mathbf{E}$ 中每一个 E 显然有

$$S(X\times E)\in\mathbf{T}_0\times\mathbf{T}_0.$$

因为 $\mathbf{T}_0\times\mathbf{T}_0$ 中集的每一个截口屬于 $\mathbf{T}_0$，于是，对于 X 中每一个 x 和 $\mathbf{E}$ 中每一个 E，

$$xE=x(X\times E)_x=(S(X\times E))_x\in\mathbf{T}_0;$$

因此（根据定理 1），$\mathbf{T}\subset\mathbf{T}_0$。 ▌

定理 3. 設 $\mathbf{T}$ 是不变 σ-环，f 是 $\mathscr{L}$ 中的 $(\mathbf{T})$ 可测函数，并設 y 是 X 中这样的元素：对于 $\mathbf{T}$ 中每一个 E，$\rho(yE,E)=0$；于是，对于 X 中每一个 x，$f(y^{-1}x)=f(x)$。

証明. 設 E 是 $\mathbf{T}$ 中测度为有限的任意集，則

$$0=\rho(yE,E)=\int|\chi_{yE}(x)-\chi_E(x)|d\mu(x)=$$

$$=\int|\chi_E(y^{-1}x)-\chi_E(x)|d\mu(x).$$

于是，对于每一个 $(\mathbf{T})$ 可测的可积簡单函数 g，

$$\int|g(y^{-1}x)-g(x)|d\mu(x)=0.$$

因为 f 可以由这类函数来逼近，所以

$$\int|f(y^{-1}x)-f(x)|d\mu(x)=0.$$

由于上面这个积分的被积函数屬于 $\mathscr{L}_+$，应用 §55 定理 2 就得到定理的結論。 ▌

定理 4. 設 $\mathbf{T}$ 是由它的测度为有限的全体集产生的不变 σ-环，并且 $\mathbf{T}$ 至少包含一个具有正测度的有界集。如果 $\mathbf{E}$ 是一个集类，它在 $\mathbf{T}$ 中测度为有限的全体集組成的度量空間中稠密，并設

$$Y=\{y:\rho(yE,E)=0,\ E\in\mathbf{E}\},$$

則 Y 是 X 的紧不变子群。

証明. 如果 $Y_0=\{y:\rho(yE,E)=0,\ E\in\mathbf{T}\}$，則显然有 $Y_0\subset Y$。另一方面，如果 E_0 是 $\mathbf{T}$ 中测度为有限的集，則对于每一个正数 ε，在 $\mathbf{E}$ 中存在集 E，使得 $\rho(E_0,E)<\frac{\varepsilon}{2}$。于是，若 $y\in Y$，則

$$0 \leqslant \rho(yE_0, E_0) \leqslant \rho(yE_0, yE) + \rho(yE, E) + \rho(E, E_0) < \varepsilon.$$

因为 ε 是任意的，所以 $y \in Y_0$，因而 $Y = Y_0$。

如果 y_1 和 y_2 都屬于 Y 而 E 屬于 $\mathbf{T}$，則

$$0 \leqslant \rho(y_1^{-1}y_2 E, E) \leqslant \rho(y_1^{-1}y_2 E, y_2 E) + \rho(y_2 E, E).$$

因为 $y_2 E \in \mathbf{T}$ 而 $\rho(y_1^{-1} y_2 E, y_2 E) = \rho(y_2 E, y_1 y_2 E)$，所以 $y_1^{-1} y_2 \in Y$；因此，Y 的确是 X 的子群。設 $y \in Y$，$x \in X$，并且 $E \in \mathbf{T}$，則 $xE \in \mathbf{T}$ 而 $\rho(x^{-1} yxE, E) = \rho(yxE, xE) = 0$；因而 Y 是不变的。

如果 E_0 是 $\mathbf{T}$ 中具有正測度的有界集，則因为对于 Y 中每一个 y 有 $\rho(yE_0, E_0) = 0$，所以 $yE_0 \cap E_0 \neq 0$。于是 $y \in E_0 E_0^{-1}$，因此，Y 被有界集 $E_0 E_0^{-1}$ 所包。最后，我們証明 Y 是閉的(因而是紧的)；我們注意到，

$$Y = \bigcap_{E \in \mathbf{E}} \{y : \rho(yE, E) = 0\},$$

由 §61 定理 1 即得結論。 ▍

定理 5. 設 E 是 X 中的任意貝尔集，則存在 X 的紧不变貝尔子群 Y，使得 E 是 Y 的陪集之併。

証明。設 $\{C_i\}$ 是紧貝尔集的叙列，使得 $E \in \mathbf{S}(\{C_i\})$，并且至少有一个 C_i 具有正的測度。对于每一个 i，設 $\{f_{ij}\}$ 是 $\mathscr{L}_+(X)$ 中具有下列性質的函数的遞減叙列：对于 X 中每一个 x，$\lim_j f_{ij}(x) = \chi_{C_i}(x)$。对于每一个正的有理数 r，$\{x : f_{ij}(x) \geqslant r\}$ 是一个紧貝尔集；設 $\mathbf{T}$ 是由一切具有这种形状的集組成的类所产生的不变 σ-环。由定理 2 可知，$\mathbf{T}$ 中測度为有限的一切集組成的度量空間是可分的；設叙列 $\{E_n\}$ 在这个度量空間中稠密。如果

$$Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{y : \rho(yE_n, E_n) = 0\},$$

則根据定理 4，Y 是 X 的紧不变子群，而根据 §61 定理 1，Y 是貝尔集。

因为每一个 f_{ij} 是 ($\mathbf{T}$) 可測的，由定理 3 可知，对于 Y 中每一个 y 和 X 中每一个 x，$f_{ij}(y^{-1} x) = f_{ij}(x)$。于是，对于 Y 中每一个 y 以及每一个 $i = 1, 2, \cdots$，$\chi_{C_i}(y^{-1} x) = \chi_{C_i}(x)$，也就是 $yC_i = C_i$。

对于 Y 中每一个 y，一切能使等式 $yF=F$ 成立的集 F 組成一个 σ-环；因此，对于 Y 中每一个 y，$yE=E$。由此有 $E=YE=\bigcup_{x\in E}Yx$；換一句話說，E 是不变子群 Y 的陪集之併。▌

定理 6. 如果 $\{e\}$ 是一个貝尔集，則 X 是可分的。

証明。設 $\{U_n\}$ 是使得 $\{e\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$ 的有界开集叙列。我們在前面已經看到，可以假定

$$\overline{U}_{n+1}\subset U_n,\quad n=1,2,\cdots$$

而不致丧失普遍性。設 $\{C_i\}$ 是使得 $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i$ 的紧集叙列；因为每一个 C_i 是紧的，所以，对于每一个 i 和 n，存在 C_i 的有限子集 $\{x_{ij}^{(n)}\}$，使得 $C_i\subset\bigcup_j x_{ij}^{(n)}U_n$。我們現在証明，可列类 $\{x_{ij}^{(n)}U_n\}$ 是一个基。

我們首先証明，如果 U 是 e 的任意邻域，則存在正整数 n，使得 $e\in U_n\subset U$。事实上，因为

$$\{e\}=\bigcap_n U_n=\bigcap_n \overline{U}_n,$$

并且 $e\in U$，所以

$$\bigcap_n(\overline{U}_n-U)=(\bigcap_n\overline{U}_n)-U=0.$$

由于 $\{\overline{U}_n-U\}$ 是紧集的遞減叙列，具有空的交集，因此，对于 n 的至少一个値，集 $U_n-U(\subset\overline{U}_n-U)$ 是空的。

現在設 x 是 X 的任意元素而 V 是 x 的任意邻域。因为 $x^{-1}V$ 是 e 的邻域，所以存在 e 的邻域 U 使得 $U^{-1}U\subset x^{-1}V$；又由上一段可知，存在正整数 n 使得 $e\in U_n\subset U$。由于 $x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i$，于是，对于 i 的某个値有 $x\in C_i$，因而对于 j 的某个値有 $x\in x_{ij}^{(n)}U_n$。由此得到 $x_{ij}^{(n)}\in xU_n^{-1}$，于是有

$$x\in x_{ij}^{(n)}U_n\subset xU_n^{-1}U_n\subset xU^{-1}U\subset xx^{-1}V=V.\ ▌$$

由定理 5 和定理 6 可以得到下面这个令人惊奇的同时也是很有用的結果。

定理 7. 設 E 是 X 中的任意貝尔集，則存在 X 的紧不变子群 Y，使得 E 是 Y 的陪集之併，并使得因子群 X/Y 是可分的。

証明。由定理5可知，存在紧不变貝尔子群 Y，使得 E 是 Y 的陪集之併。設 $Y=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$，其中 $\{U_n\}$ 是开集的叙列，則对于每一个正整数 n，在因子群 $\hat{X}=X/Y$ 中存在开集 $\hat{U}_n$，使得

$$Y\subset\pi^{-1}(\hat{U}_n)\subset U_n,$$

其中 π 是 X 在 $\hat{X}$ 上的射影（参看§63 定理1）。于是有 $Y=\bigcap_{n=1}^{\infty}\pi^{-1}(\hat{U}_n)$，从而有 $\{\hat{e}\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\hat{U}_n$；由定理6可知，$\hat{X}$ 是可分的。▌

定理8. X 中每一个哈尔測度是增补正則的。

証明。只須証明，如果 U 是任意有界开集，則 U 必包含滿足下列条件的貝尔集 E：$U-E$ 能被測度为零的一个貝尔集所遮盖。对于給定的 U，我們选擇貝尔集 $E(\subset U)$ 使 $\mu(E)$ 为最大。根据定理7，存在 X 的紧不变子群 Y，使得 E 是 Y 的陪集之併，并使得因子群 $\hat{X}(=X/Y)$ 是可分的。

設 π 是 X 在 $\hat{X}$ 上的射影，并令 $F=\pi^{-1}\pi(U-E)$；我們現在証明，F 是測度为零的貝尔集。由于 E 是 Y 的陪集之併，因此 $\pi(U-E)=\pi(U)-\pi(E)$；因为 $\pi(U)$ 是可分空間中的开集，所以 $\pi(U)$ 是 $\hat{X}$ 中的貝尔集（参看§50 定理5）。由关系式 $F=\pi^{-1}\pi(U)-E$ 可知，F 的确是一个貝尔集。

因为 X 中全体貝尔开集类是一个基，所以，对于 $U-E$ 中每一个点 x，存在貝尔开集 $V(x)$ 使得 $x\in V(x)\subset U$。因为 $\{\pi(V(x)): x\in U-E\}$ 是 $\pi(U-E)$ 的一个开复盖，又因为 $\hat{X}$ 是可分的，所以，存在 $U-E$ 中的点叙列 $\{x_i\}$ 使得

$$\pi(U-E)\subset\bigcup_i\pi(V(x_i)).$$

由于 $\pi(U-E)=\pi(U)-\pi(E)$，我們有

$$\pi(U-E)\subset(\bigcup_i\pi(V(x_i)))-\pi(E)=\bigcup_i\pi(V(x_i)-E).$$

由此可見，为了完成这个定理的証明，我們只須証明，对于被 U 所包的每一个貝尔开集 V，有

$$\mu(\pi^{-1}(\pi(V-E)))=0;$$

現在我們就来导出这个結果.（首先我們注意到，上面用以說明 $\pi^{-1}\pi(U-E)$ 是貝尔集的論点，如果把 U 换成 V，仍然可以应用.）

如果 V 是被 U 所包的貝尔开集，則根据关于 E 的最大性質，有 $\mu(V-E)=0$. 如果 ν 是 Y 中使得 $\nu(Y)=1$ 的哈尔测度，若令 $\hat{\mu}=\mu\pi^{-1}$ 和 $g(x)=\nu(x^{-1}(V-E)\cap Y)$，則（参看 §63 定理 7）存在 $\hat{X}$ 上的（非負）貝尔可测函数 $\hat{g}$，使得 $g=\hat{g}\pi$ 和

$$0=\mu(V-E)=\int\hat{g}d\hat{\mu}=\int gd\mu\geqslant$$

$$\geqslant\int_{\pi^{-1}\pi(V-E)}\nu(x^{-1}(V-E)\cap Y)d\mu(x)\geqslant 0;$$

由等式

$$x^{-1}(V-E)\cap Y=(x^{-1}V\cap Y)-(x^{-1}E\cap Y)$$

可知，如果 $x\in V$，則 $e\in x^{-1}V\cap Y$，如果 $x\in' E$，則 $x^{-1}E\cap Y=0$. 于是，若 $x\in V-E$，則 $x^{-1}(V-E)\cap Y$ 是 Y 的非空开子集. 由此可見，如果 $x\in\pi^{-1}\pi(V-E)$，从而对于 $V-E$ 中某个 x_0 有 $\pi(x)=\pi(x_0)$，則

$$g(x)=\hat{g}(\pi(x))=\hat{g}(\pi(x_0))=g(x_0)>0;$$

根据 §25 定理 4 就有 $\mu(\pi^{-1}\pi(V-E))=0$. ▌

定理 9. 設 X 是任意（不一定是 σ–紧的）局部紧拓扑群. 如果 μ 是 X 中的左不变波雷耳测度，則 μ 是增补正則的.

証明. 对于 X 中任意波雷耳集 E，存在 X 的 σ–紧开子群 Z 使得 $E\subset Z$. 根据定理 8，μ 在 Z 上是增补正則的，因此，在 Z 中存在具有下列性質的集 A 和 B：A 和 B 是 Z 的貝尔子集，并且

$$A\subset E\subset B,\qquad \mu(B-A)=0.$$

因为 Z 在 X 中旣为开集又为閉集，所以 A 和 B 也是 X 的貝尔子集. ▌

参考文献索引

(方括号里的数字指"参考文献"表中的号碼)

[24]和[44]. 定理3和(7):[48]和[8].

§42. 荷德尔与閔可夫斯基不等式: [26, 第139—143和146—150頁]. 函数空間:[5].(3):[54,第130頁].

§43. 点函数与集函数:[28]. 定理5:[28,第338和603頁].

§44. [23],[45]和[67].

§46. [71]. 柯尔莫哥洛夫不等式: [37, 第310頁]. 关于級数的定理: [35],[37]和[38].

§47. 大数定律:[30]和[39]. 正規数:[9,第260頁].

§48. 条件概率和条件数学期望: [40,第五章].(4): [18]和[20, 第96頁].

§49. 定理1: [40, 第24—30頁]. 定理2: [43, 第129—130頁]. (3): [20,第92頁]和[65].

§51. 波雷耳集和貝尔集:[33]和[36].

§52. [55]. (10):[17].

§54. 正則容度:[2].

§55. 卢辛定理:[61,第72頁]和[62].

§56. 綫性泛函数:[5,第61頁]和[31,第1008頁].

§58. [73,第33—34頁]. 遮盖平面集的圓:[34].

§59. [73,第140—149頁].

§60. [13],[46]和[53].

§61. 分部积分法:[61,第102頁]和[70].

§62. (6):[36,第93頁].

§63. [4]和[73,第42—45頁].

§64. [33].

参考文献

1. P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie, Berlin, 1935.
2. W. Ambrose, Lectures on topological groups (未出版), Ann. Arbor, 1946.
3. W. Ambrose, Measures on locally compact topological groups, Trans. A. M. S., **61** (1947), 106—121.
4. W. Ambrose, Direct sum theorem for Haar measures, Trans. A. M. S., **61** (1947), 122—127.
5. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.
6. G. Birkhoff, Lattice theory, New York, 1940.
7. G. Birkhoff and S. MacLane, A survey of modern algebra, New York, 1941.
8. A. Bischof, Beiträge zur Carathéodoryschen Algebraisierung des Integralbegriffs, Schr. Math. Inst. u. Inst. Angew. Math. Univ. Berlin, **5** (1941), 237—262.
9. E. Borel, Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Rend. Circ. Palermo, **27** (1909), 247—271.
10. N. Bourbaki, Sur un théorème de Carathéodory et la mesure dans les espaces topologiques, C. R. Acad. Sci. Paris, **201** (1935), 1309—1311.
11. K. R. Buch, Some investigations of the set of values of measures in abstract space, Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd., **21**, № 9 (1945).
12. C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig-Berlin, 1927.
13. H. Cartan, Sur la mesure de Haar, C. R. Acad. Sci. Paris, **211** (1940), 759—762.
14. C. Chevalley and O. Frink, Bicompactness of Cartesian products, Bull. A. M. S., **47** (1941), 612—614.
15. R. Courant, Differential and integral calculus, London-Glasgow, 1934.
16. H. Cramér, Random variables and probability distributions, Cambridge, 1937.
17. J. Dieudonné, Un exemple d'espace normal non susceptible d'une structure uniforme d'espace complet, C. R. Acad. Sci. Paris, **209** (1939), 145—147.
18. J. Dieudonné, Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym (III), Ann. Univ. Grenoble, **23** (1948), 25—53.
19. J. L. Doob, Stochastic processes depending on a continuous parameter, Trans. A. M. S., **42** (1937), 107—140.
20. J. L. Doob, Stochastic processes depending on an integral-valued parameter,

Trans. A. M. S., **44** (1938), 87—150.

21. O. Frink, Representations of Boolean algebras, Bull. A. M. S., **47** (1941), 755—756.
22. P. R. Halmos and J. V. Neumann, Operator methods in classical mechanics, II, Ann. Math., **43** (1942), 332—350.
23. P. R. Halmos, The foundations of probability, Amer. Math. Monthly, 51 (1944), 493—510.
24. P. R. Halmos, The range of a vector measure, Bull. A M. S., **54** (1948), 416—421.
25. P. R. Halmos, Measurable transformations, Bull. A. M. S., **55** (1949).
26. G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, Inequalities, Cambridge, 1934.
27. F. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin-Leipzig, 1927.
28. E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, Vol. I, Cambridge, 1927.
29. W. Hurewicz and H. Wallman, Dimension theory, Princeton, 1941.
30. M. Kac, Sur les fonctions indépendantes,I, Studia Math., **6** (1936), 46—58.
31. S. Kakutani, Concrete representation of abstract (*M*)-spaces, Ann. Math., **42** (1941), 994—1024.
32. S. Kakutani, Notes on infinite product measure spaces, I, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **19** (1943), 148—151.
33. S. Kakutani und K. Kodaira, Über das Haarsche Mass in der lokal bikompakten Gruppe, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **20** (1944), 444—450.
34. R. Kershner, The number of circles covering a set, Amer. Journ. Math., **61** (1939), 665—671.
35. А. Я. Хинчин и А. Н. Колмогоров, Über Konvergenz der Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, Мат. сборник, **32** (1925), 668—677.
36. K. Kodaira, Über die Beziehung zwischen den Massen und Topologien in einer Gruppe, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **23** (1941), 67—119.
37. А. Н. Колмогоров, Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen, Math. Ann., **99** (1928), 309—319.
38. А. Н. Колмогоров, Bemerkungen zu meiner Arbeit „Über die Summen der zufälliger Grössen", Math. Ann., **102** (1930), 484—488.
39. А. Н. Колмогоров. Sur la loi forte des grands nombres, C. R. Acad. Sci. Paris, **191** (1930), 910—912.
40. А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, Москва, 1936.
41. C. Kuratowski, Topologie, Warszawa-Lwów, 1933.
42. S. Lefschetz, Algebraic topology, New York, 1942.
43. P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris. 1937.
44. А. А. Ляпунов, О вполне аддитивных векторных функциях, Изв. АН

СССР, 4 (1940), 465—478.

45. A. Lomnicki, Nouveaux fondements du calcul des probabilités, Fund. Math., **4** (1923), 34—71.
46. L. H. Loomis, Abstract congruence and the uniqueness of Haar measure, Ann. Math., **46** (1945), 348—355.
47. L. H. Loomis, On the representation of σ-complete Boolean algebras, Bull. A. M. S., **53** (1947), 757—760.
48. D. Maharam, On homogeneous measure algebras, Proc. N. A. S., **28** (1942), 108—111.
49. E. Marczewski, Sur l'isomorphie des mesures séparables, Colloq. Math., **1** (1947), 39—40.
50. K. Menger, Untersuchungen über allgemeine Metrik, Math. Ann., **100** (1928), 75—163.
51. J. V. Neumann, Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik, Ann. Math., **33** (1932), 587—642.
52. J. V. Neumann, Functional operators, Princeton, 1933—1935.
53. J. V. Neumann, The uniqueness of Haar's measure, Мат. сборник, **1** (1936), 721—734.
54. J. V. Neumann, On rings of operators, III, Ann. Math., **41** (1940), 94—161.
55. J. V. Neumann, Lectures on invariant measures (未出版), Princeton, 1940.
56. O. Nikodym, Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon, Fund. Math., **15** (1930), 131—179.
57. J. C. Oxtoby and S. M. Ulam, On the existence of a measure invariant under a transformation, Ann. Math., **40** (1939), 560—566.
58. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Москва, 1938.
59. S. Saks, On some functionals, Trans. A. M. S., **35** (1933), 549—556.
60. S. Saks, Addition to the note on some functionals, Trans. A. M. S., **35** (1933), 965—970.
61. S. Saks, Theory of the integral, Warszawa-Lwów, 1937.
62. H. M. Schaerf, On the continuity of measurable functions in neighborhood spaces, Portugaliae Math., **6** (1947). 33—44.
63. H. Scheffé, A useful convergence theorem for probability distributions. Ann. Math. Stat., **18** (1947), 434—438.
64. E. Sparre Andersen and B. Jessen, Some limit theorems on integrals in an abstract set, Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd., **22**, № 14 (1946).
65. E. Sparre Andersen and B. Jessen, On the introduction of measures in infinite product sets, Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd., **25**, № 4 (1948).
66. E. R. Stabler, Boolean representation theory, Amer. Math. Monthly, **51** (1944), 129—132.

67. H. Steinhaus, Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure, Fund., Math., **4** (1923), 286 -310.
68. M. H. Stone, The theory of representations for Boolean algebras, Trans. A. M. S., **40** (1936). 37—111.
69. M. H. Stone, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. A. M. S., **41** (1937), 375—481.
70. G. Tautz, Eine Verallgemeinerung der partiellen Integration; uneigentliche mehrdimensionale Stieltjesintegrale, Jber. Deutsch. Math. Verein., **53** (1943), 136—146.
71. E. R. van Kampen, Infinite product measures and infinite convolutions, Amer. Journ. Math., **62** (1940), 417 -448.
72. A. Weil, Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Paris, 1938.
73. A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Paris, 1940.
74. K. Yosida, Vector lattices and additive set functions, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **17** (1941), 228—232.

常用記号表

（本表中的数字指記号的定义所在处的頁数）

索 引

一 划

二 划

三 划

四 划

五 划

六 划

七 划

八 划

九 划

十 划

十一划

十二划

十三划

十四划

十六划

十八划

其　他